SUITES

Table des matières

I – Généralités

1 – Activités de découverte

Activité 1 : les séries logiques
On imagine une série de nombres dont on connait les quatre premiers termes. On essaie d'imaginer le nombre logique caché en cinquième position, puis en n-ième position

Série 1 : 1, 2, 3, 4, …
Réponse : 5 et n

Série 2 : -1, -2, -3, -4, …
Réponse : -5 et -n

Série 3 : 2, 4, 6, 8, …
Réponse : 10 et 2n

Série 4 : 1, 3, 5, 7, …
Réponse : 9 et 2n - 1

Série 5 : 10, 15, 20, 25, …
Réponse : 30 et 5n + 5

Série 6 : 1, 2, 4, 8, …
Réponse : 16 et 2^{n-1}

Série 7 : 1, 11, 111, 1111, …
Pour la formule générale, on essaie de se raccrocher à un nombre plus simple
1 : 9 fois 1 + 1 = 10
11 : 9 fois 11 + 1 = 100
111 : 9 fois 111 + 1 = 1000
1111 : 9 fois 1111 + 1 = 10000
Le nombre en n-ième position (N) : 9 fois N + 1 = 10^n
Réponse : 11111 et $\frac{10^n-1}{9}$

Série 8 : 1, 4, 9, 16, …
Réponse : 25 et n^2

Activité 2 : Le nénuphar et le bassin
On introduit un nénuphar d'une superficie initiale de 1 m² dans un bassin de 200 m². On sait que la surface recouverte par cette plante augmente chaque semaine de 15 %. Question classique : au bout de combien de semaines, la plante aura t-elle recouvert tout le bassin ?
Solution : Afin de suivre l'évolution du nénuphar chaque semaine, on définit les grandeurs suivantes :
u_0 : « la surface initiale de la plante »
u_n : « la surface de la plante au bout de la semaine n, n > 0 »

Bien entendu $u_0 = 1$

L'augmentation de 15 % d'une semaine à l'autre, se traduit par : $u_{n+1} = u_n + \frac{15}{100} u_n$ d'où $u_{n+1} = 1,15\ u_n$

Nous avons défini une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison 1,15. On peut écrire u_n sous la forme : $u_n = u_0\ 1,15^n = 1,15^n$

On se pose maintenant la question : à quel moment $u_n \geq 200$?

d'où : $1,15^n \geq 200$

$\Rightarrow \ln(1,15^n) \geq \ln(200)$ la fonction ln est croissante sur son ensemble de définition

$\Rightarrow n \ln(1,15) \geq \ln(200)$

$$n \geq \frac{\ln(200)}{\ln(1,15)} \approx 37,91$$

Remarque : $u_{37} = 1,15^{37} \approx 176,12$ et $u_{38} = 1,15^{38} \approx 202,54$

Le nénuphar recouvre le bassin au cours de la semaine 38

2 – Rappels

a – Définition d'une suite réelle

Une suite réelle u est une fonction d'une partie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. L'image de n par u est notée u(n) ou u_n

Exemple de suite sous forme explicite :

$$u_n = \frac{1}{n} \text{ pour } n \geq 1$$

Exemples de suites sous forme récurrente :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = 3 u_n - 7$$

$$u_1 = 12, u_2 = 3 \text{ et } u_{n+2} = \frac{2}{u_{n+1}} + u_n + 1$$

b – suites classiques

nature	arithmétique	géométrique
nom	u	u
forme récurrente	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = r\ u_n$
raison	r	r
formes explicites	$u_n = u_0 + n\ r$ $u_n = u_1 + (n - 1)\ r$ $u_n = u_p + (n - p)\ r$ où $n \geq p$	$u_n = u_0\ r^n$ $u_n = u_1\ r^{n-1}$ $u_n = u_p\ r^{n-p}$ où $n \geq p$
somme de termes consécutifs $S(p, n) = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n =$	$\frac{u_p + u_n}{2} \times (n - p + 1)$	$u_p \frac{1 - r^{n-p+1}}{1 - r}$
Limite en $+\infty$	Si $r < 0$, $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ Si r = 0, u est constante Si $r > 0$, $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$	On suppose que le premier terme n'est pas nul Si $r \leq -1$, pas de limite Si $-1 < r < 1$, la limite est 0 Si r = 1, u est constante Si $r > 1$, limite infinie du signe du premier terme

Remarque : S(p, n) dans le cas arithmétique

$$\frac{premier\ terme + dernier\ terme}{2} \times (nombre\ de\ termes)$$

Remarque : S(p, n) dans le cas géométrique

$$(premier\ terme) \times \frac{1 - r^{nombre\ de\ termes}}{1 - r}$$

Applications :

50 + 51 + … + 100 = $\frac{50+100}{2} \times 51 = 3825$

1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = $1 \times \frac{1-2^6}{1-2} = 63$

II – Raisonnement par récurrence

1 – Principe

On se donne les moyens de démontrer qu'un propriété quelconque P(n) est vraie à partir d'un certain rang n_0

On admet qu'il suffit de franchir les deux étapes suivantes

<u>Etape 1</u> : vérifier que P(n_0) est vraie

<u>Etape 2</u> : en supposant que P(n) est vraie pour n ≥ n_0, montrer que P(n + 1) est vraie

2 – Applications

A1 : on pose S(n) = 1 + 2 + 3 + … + n

Soit P(n) : $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

Montrons par récurrence que P(n) est vraie pour n ≥ 1

Etape 1 : P(1) est vraie, en effet S(1) = 1, ainsi $\frac{1(1+1)}{2} = 1 = S(1)$

Etape 2 : on suppose que P(n) est vraie, montrons que P(n + 1) est vraie
Il est impératif de relier P(n + 1) à P(n) afin d'utiliser P(n)
A ce titre : S(n + 1) = 1 + 2 + 3 + ...+ n + n + 1 = S(n) + n + 1

ainsi : $S(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1)(\frac{n}{2} + 1) = \frac{[n+1]([n+1]+1)}{2}$

P(n + 1) est donc vraie
Conclusion : P(n) est vraie pour n ≥ 1

A2 : on définit la suite u de la façon suivante

$$u_0 = -1000\ et\ u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 4$$

** Soit P(n) : $u_n \leq 6$
Montrons par récurrence que P(n) est vraie pour n ≥ 0
Etape 1 : P(0) est vraie car u_0 = - 1000

Etape 2 : on suppose que P(n) est vraie, montrons que P(n + 1) est vraie
partons de P(n) et fabriquons u_{n+1}

$$u_n \leq 6 \Rightarrow \frac{1}{3}u_n \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{3}u_n + 4 \leq 6 \Leftrightarrow u_{n+1} \leq 6$$

P(n + 1) est donc vraie
Conclusion : P(n) est vraie pour n ≥ 0

** Soit Q(n) : $u_{n+1} - u_n \geq 0$
Montrons par récurrence que Q(n) est vraie pour n ≥ 0

Etape 1 : Q(0) est vraie car $u_1 - u_0 = \frac{1}{3} \times (-1000) + 4 + 1000 = \frac{2}{3} \times 1000 + 4 \geq 0$

Etape 2 : on suppose que Q(n) est vraie, montrons que Q(n + 1) est vraie

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} + 4 - \frac{1}{3}u_n - 4 = \frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n) \geq 0$$

Q(n + 1) est donc vraie
Conclusion : Q(n) est vraie pour n ≥ 0

A3 : Soit E un ensemble quelconque à n éléments
Soit P(n) : E possède 2^n parties
Montrons par récurrence que P(n) est vraie pour n ≥ 0

Etape 1 : P(0) est vraie car un ensemble à 0 éléments ne contient que la partie vide et $2^0 = 1$

Etape 2 : on suppose que P(n) est vraie, montrons que P(n + 1) est vraie
Soit E un ensemble à n + 1 éléments. Soit x un élément de E. On définit E' comme E privé de x. E' possède n éléments. On dénombre les parties de E comme suit :

** Les parties de E ne contenant pas x
Ce sont toutes les parties de E', et d'après l'hypothèse de récurrence, il y en a 2^n

** Les parties de E contenant x
On conçoit de « fabriquer » ces parties à partir des précédentes auxquelles on joint x. il y en aussi 2^n

Nombre total de parties de E : $2^n + 2^n = 2^{n+1}$

P(n + 1) est donc vraie
Conclusion : P(n) est vraie pour n ≥ 0

A4 : on pose $S(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

Soit P(n) : $S(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Montrons par récurrence que P(n) est vraie pour n ≥ 1

Etape 1 : P(1) est vraie, en effet S(1) = 1, ainsi $\frac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} = 1 = S(1)$

Etape 2 : on suppose que P(n) est vraie, montrons que P(n + 1) est vraie
Il est impératif de relier P(n + 1) à P(n) afin d'utiliser P(n)
A ce titre : $S(n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = S(n) + (n+1)^2$

ainsi : $S(n+1)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=(n+1)(\frac{n(2n+1)}{6}+n+1)=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

Dans la mesure où on sait ce que l'on veut obtenir, il suffit de remarquer que : (n + 2)(2n + 3) = 2n² + 7n + 6, ainsi : $S(n+1)=\frac{[n+1]([n+1]+1)(2[n+1]+1)}{6}$

P(n + 1) est donc vraie
Conclusion : P(n) est vraie pour n ≥ 1

A5 : on pose S(n) = 1³ + 2³ + 3³ + … + n³
Soit P(n) : $S(n)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
Montrons par récurrence que P(n) est vraie pour n ≥ 1
Etape 1 : P(1) est vraie, en effet S(1) = 1, ainsi $\frac{1^2(1+1)^2}{4}=1=S(1)$
Etape 2 : on suppose que P(n) est vraie, montrons que P(n + 1) est vraie
Il est impératif de relier P(n + 1) à P(n) afin d'utiliser P(n)
A ce titre : S(n + 1) = 1³ + 2³ + 3³ + ...+ n³ + (n + 1)³ = S(n) + (n + 1)³
ainsi :

$$S(n+1)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=(n+1)^2(\frac{n^2}{4}+n+1)=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}=\frac{[n+1]^2([n+1]+1)^2}{4}$$

P(n + 1) est donc vraie
Conclusion : P(n) est vraie pour n ≥ 1

A6 : on définit la suite u de la façon suivante

$$u_0\in[0;1] et\, u_{n+1}=1+\frac{u_n}{n+1}$$

Soit P(n) : $1 \leq u_n \leq 2$
Montrons par récurrence que P(n) est vraie pour n ≥ 1

Etape 1 : P(1) est vraie, en effet : $u_1=1+\frac{u_0}{0+1}=1+u_0$
Etape 2 : on suppose que P(n) est vraie, montrons que P(n + 1) est vraie

$$u_{n+1}=1+\frac{u_n}{n+1}\Rightarrow 1\leq u_{n+1}\leq 1+\frac{2}{n+1}\leq 2$$

P(n + 1) est donc vraie
Conclusion : P(n) est vraie pour n ≥ 1

III – Etude des suites

1 – Sens de variation d'une suite

Définition : Soit u une suite
u est croissante s'il existe un entier naturel n_0 tel que : $n \geq n_0$ alors $u_{n+1} \geq u_n$

u est décroissante s'il existe un entier naturel n_0 tel que : $n \geq n_0$ alors $u_{n+1} \leq u_n$

Comment faire ?

Cas 1 : u sous forme explicite ($u_n = f(n)$)

On peut dans ce cas étudier la fonction f. Prenons l'exemple $u_n = n^2 - 20n + 100$
Soit x un réel, on pose $f(x) = x^2 - 20x + 100$. f est une fonction dérivable et $f'(x) = 2x - 20$
On montre facilement que f est croissante à partir de la valeur 10. Il en est de même pour u

Cas 2 : u est sous forme récurrente

Le plus classique est d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$
Prenons l'exemple : $u_0 = 13$ et $u_{n+1} = -u_n^2 + 3u_n - 1$
Cet exemple peut paraître compliqué, mais appliquons la règle
$u_{n+1} - u_n = -u_n^2 + 2u_n - 1 = -(u_n^2 - 2u_n + 1) = -(u_n - 1)^2 \leq 0$
u est une suite décroissante à partir de n = 0

Dans des cas très particuliers (u gardant un signe constant), on peut plutôt étudier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et le signe de $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$. Prenons l'exemple $u_n = \frac{1}{n+1}$
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} < 1$. u est une suite décroissante à partir de n = 0

2 – Limite d'une suite (en + ∞)

a – u a pour limite + ∞ lorsque n tend vers + ∞

Notation : $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
Définition : Tout intervalle de la forme]A ; + ∞ [, A étant un réel, contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang N

Exemple : $u_n = \ln(n)$
Soit A un réel, recherchons le rang à partir duquel $u_n > A$
$\ln(n) > A \Rightarrow n > e^A$, *on pose* $N = E(e^A) + 1$, E désignant la partie entière.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à N. On a : $n > e^A \Rightarrow \ln(n) > A \Rightarrow u_n > A$
Conclusion : $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

b – u a pour limite – ∞ lorsque n tend vers + ∞

Notation : $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$
Définition : Tout intervalle de la forme] – ∞ ; A[, A étant un réel, contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang N

c – u a pour limite, un nombre réel fini L lorsque n tend vers + ∞

Notation : $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$

Définition : Tout intervalle ouvert contenant L, contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang N

d – u n'a pas de limite en + ∞

Quelques exemples de suites n'ayant pas de limite en + ∞

$u_0 = 3\, et\, u_{n+1} = \frac{1}{u_n}$ u prend alternativement les valeurs $3\, et\, \frac{1}{3}$

$u_n = (-1)^n$ u prend alternativement les valeurs 1 et – 1

Propriété : Soit u une suite convergeant vers une limite finie L. u est alors bornée
En effet, Soit I =] L – 1 ; L + 1 [. A partir d'un certain rang N, tous les termes sont dans cette intervalle et donc bornés par L + 1. Bien entendu les autres termes u_0, …, u_{N-1} sont en nombre fini et donc bornés
Conclusion : u est bornée

Propriété : Soit u une suite convergeant vers une limite finie L, ayant des termes positifs ou nuls. L est alors positive ou nulle
En effet ; supposons que L < 0. En appliquant la définition de la limite, les termes seront dans l'intervalle $]\frac{3L}{2}; \frac{L}{2}[$ à partir d'un certain rang N ce qui imposerait que les termes soient strictement négatifs :
IMPOSSIBLE
Conclusion : L ≥ 0

Propriété : Soit u une suite convergeant vers une limite finie L, soit v une suite convergeant vers une limite finie L'. On suppose qu'à partir d'un certain rang : $u_n \leq v_n . Alors\, L \leq L'$

3 – Critères de convergence d'une suite

Critère 1 : Soit u une suite croissante et non majorée, alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
En effet : Soit A un nombre réel
u n'étant pas bornée, il existe un terme u_N supérieur à A
u étant croissante, alors si n ≥ N, u_n ≥ A. Ainsi, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle] A : + ∞ [à partir du rang N
Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Critère 2 : Soit u une suite décroissante et non minorée, alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Critère 3 (admis) :
Soit u une suite croissante et majorée, alors u converge vers une limite finie
Soit v une suite décroissante et minorée, alors v converge vers une limite finie

Exemple : $u_0 = 0\, et\, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$
On peut montrer sans difficulté, par un raisonnement par récurrence que : $0 \leq u_n \leq 2$
Montrons que u est croissante

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n+2} - u_n = \frac{(\sqrt{u_n+2} - u_n)(\sqrt{u_n+2} + u_n)}{\sqrt{u_n+2} + u_n} = \frac{u_n + 2 - u_n{}^2}{\sqrt{u_n+2} + u_n}$$

Le dénominateur est positif, le numérateur est un polynôme de degré 2, positif entre les racines

éventuelles. Recherchons les racines éventuelles
$\Delta=9, x_1=-1\, et\, x_2=2$ vu l'encadrement trouvé pour u_n , on en déduit : $u_{n+1}-u_n\geq 0$
Ainsi u est croissante et majorée
Conclusion : u est converge vers une limite finie L et $0\leq L\leq 2$

Critère 4 (Théorème des gendarmes) : Soit u, v, w trois suites telles que u et w convergent vers la même limite finie L et encadrant v à partir d'un certain rang. Alors v converge vers la même limite L

Exemple : $n>0, u_n=\frac{-1}{n}, v_n=\frac{\sin(n)}{n}, w_n=\frac{1}{n}$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0, \lim\limits_{n\to+\infty} w_n=0\, et\, u_n\leq v_n\leq w_n$
Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$

Critère 5 : Soit u, v deux suites telles que : $u_n\leq v_n\, et \lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty\, alors \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$

Critère 6 : Soit u, v deux suites telles que : $u_n\leq v_n\, et \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty\, alors \lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

4 – Règles de calcul des limites

a – opérations sur les limites
Dans la mesure où les suites sont des fonctions particulières, on admet que les opérations sur les limites restent les mêmes pour les suites, concernant la limite de la somme ou du produit de deux suites.

Rappelons simplement les formes indéterminées classiques

limite de la suite u	u opération v	limite de la suite v
∞	+	+ ∞
0	$\times$	± ∞
± ∞	÷	± ∞
0	÷	0

b – composée d'une suite et d'une fonction

Théorème (admis) :
b et B désignent des réels , + ∞ ou – ∞
g désigne une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant b
u désigne une suite des réels appartenant à I à partir d'un certain rang

$$Si \lim\limits_{n\to+\infty} u_n=b\, et \lim\limits_{x\to b} g(x)=B, alors \lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n)=B$$

Application 1 :
On étudie la limite de la suite v, définie par : $v_n=n(e^{\frac{1}{n}}-1)$
On pose : $g(x)=\frac{e^x-1}{x}, u_n=\frac{1}{n}, v_n=g(u_n)$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0\, et \lim\limits_{x\to 0} g(x)=1, alors \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=1$

Application 2 :
On suppose de plus que g est continue en b, alors B = g(b)

Application 3 :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I telle que f(x) appartient à I pour tout x de I. on définit la suite u par la relation : $u_0 \in I \text{ et } u_{n+1} = f(u_n)$
On suppose que u converge vers une limite finie L et que L appartient à I, alors f(L) = L

Exemple : $u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$
On a vu précédemment que cette u est convergente vers une limite finie L comprise entre 0 et 2
On pose : $f(x) = \sqrt{x+2}, u_{n+1} = f(u_n)$
On prend I = [0 ; 2]. f(I) est inclus dans I et f est continue sur I
L vérifie donc la relation de récurrence : f(L) = L, d'où
$\sqrt{L+2} = L \Rightarrow L+2 = L^2 \Rightarrow L^2 - L - 2 = 0 \Rightarrow L = -1 \text{ ou } L = 2$
Vu l'encadrement de L, on en déduit L = 2

Remarque : Cette application est importante, car elle est un moyen d'obtenir la valeur de la limite éventuelle de la suite u

IV – Suites particulières

1 – Suites adjacentes

Définition : Deux suites u et v sont dites adjacentes, si elles vérifient les conditions suivantes :
- u est croissante, v est décroissante
- $\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Résumé : l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence tend vers 0

Théorème : Soit u et v deux suites adjacentes. Elles convergent vers une même limite finie L
En effet :
- Montrons que u ≤ v et supposons par l'absurde, qu'il existe un indice N pour lequel $u_N > v_N$

Soit n supérieur à N. On a :
$v_n \le v_N < u_N \le u_n \Rightarrow u_n - v_n > u_N - v_N > 0 \Rightarrow 0 = \lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) \ge u_N - v_N > 0 : IMPOSSIBLE$
Ainsi : u ≤ v

- u est croissante et majorée (par le premier terme de v)
- v est décroissante et minorée (par le premier terme de u)

Ainsi u et v convergent vers des limites finies respectives L et L'

Or $\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$, on en déduit : L = L'

Exemple 1 : soit u et v deux suites définies par : $n > 0, u_n = 10 - \frac{1}{n} \text{ et } v_n = 10 + \frac{1}{n}$

u est croissante et v est décroissante. De plus : $v_n - u_n = \frac{2}{n} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Conclusion : u et v sont adjacentes

Exemple 2 : soit u et v deux suites définies par : $n>0, u_n=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+...+\frac{1}{n!}\ et\ v_n=u_n+\frac{1}{n!}$

Remarque : $u_1=2\ et\ v_1=3$

- Montrons que u est croissante

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)!}>0\Rightarrow u\uparrow$$

$$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}-u_n+\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}=\frac{2}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}=\frac{1}{n!}(\frac{2}{n+1}-1)=\frac{1}{n!}(\frac{1-n}{n+1})\leq 0\Rightarrow v\downarrow$$

- Montrons que v – u tend vers 0

$$0\leq v_n-u_n=\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{n}\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$$

Conclusion : u et v sont adjacentes. En fait la limite commune est égale au nombre de Neper e (≈ 2.718)

Exemple 3 : soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par f(x) = x². On cherche à retrouver : $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{3}$

IDEE ; on encadre cette intégrale par l'intégrale de deux fonctions en escalier, l'une située en dessous de f et une autre située au dessus de f
Soit un entier naturel n, n > 0

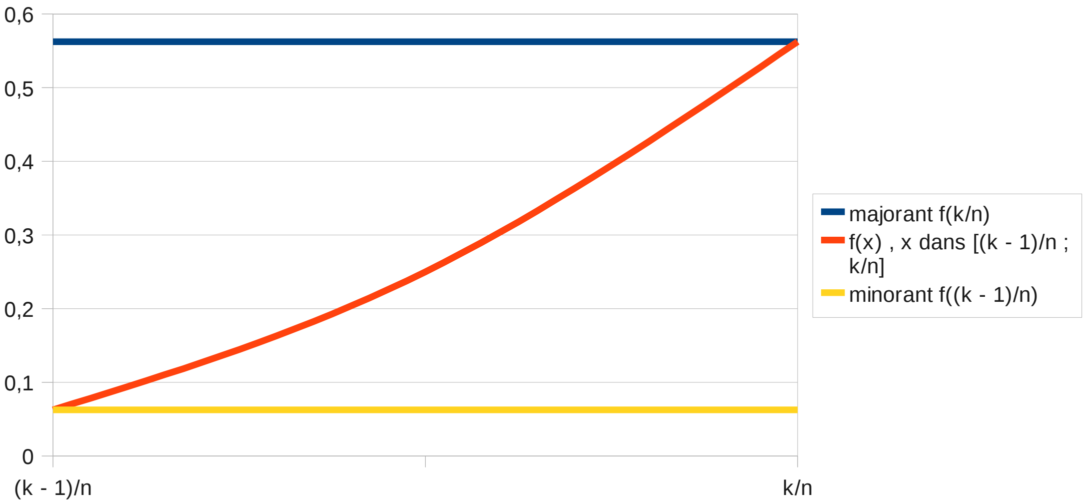
On découpe l'intervalle [0 ; 1] en n intervalles d'amplitude $\frac{1}{n}$: $[0;\frac{1}{n}],[\frac{1}{n},\frac{2}{n}],...,[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n}=1]$

f est une fonction croissante sur [0 ; 1]. Soit k un entier compris entre 1 et n

$$x\in[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]\Rightarrow f(\frac{k-1}{n})\leq f(x)\leq f(\frac{k}{n})\Rightarrow \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(\frac{k-1}{n})dx\leq\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx\leq\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(\frac{k}{n})dx$$

$$\Rightarrow f(\frac{k-1}{n})\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} dx\leq\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx\leq f(\frac{k}{n})\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} dx\Rightarrow f(\frac{k-1}{n})\frac{1}{n}\leq\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx\leq f(\frac{k}{n})\frac{1}{n}$$

Ce qui donne la double inégalité : $\frac{(k-1)^2}{n^3}\leq\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx\leq\frac{k^2}{n^3}$



On somme toutes les tranches d'intégrale : $\int_0^1 f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx$

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2\leq\int_0^1 f(x)dx\leq\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\Rightarrow\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{1}{n}\leq\int_0^1 f(x)dx\leq\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

On sait (voir « raisonnement par récurrence ») que : $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

d'où $\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}-\frac{1}{n}\leq\int_0^1 f(x)dx\leq\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

On pose : $n>0, v_n=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}, u_n=v_n-\frac{1}{n}, u_n\leq\int_0^1 f(x)dx\leq v_n$

- Montrons que u est croissante

$$u_n=\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}-\frac{1}{n}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}=g(n)$$

Etudions g en tant que fonction réelle pour x ≥ 1 : $g(x)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{6x^2}\Rightarrow g'(x)=\frac{3x-2}{6x^3}>0$

g est croissante, u l'est aussi

- Montrons que v est décroissante

$$v_n=\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$$

Pas besoin de dériver, $\frac{1}{n}\, et\, \frac{1}{n^2}$ sont des termes décroissants. v est alors décroissante

- Montrons que v – u tend vers 0

$$v_n-u_n=\frac{1}{n}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$$

Conclusion : u et v sont adjacentes et la limite commune est égale à $\frac{1}{3}$. Il en résulte : $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{3}$

2 – Suites arithmético-géométriques

Définition : soit u une suite définie par la relation

$$u_0\in\mathbb{R}, a\in\mathbb{R}\, et\, a\neq1, b\in\mathbb{R}\, et\, b\neq0, u_{n+1}=a u_n+b$$

Attention : malgré le nom évocateur u n'est ni arithmétique ni géométrique. Etudions u dans un cas précis

$$u_0=-23, u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+1$$

On utilise une <u>suite intermédiaire</u> v qui sera géométrique. On pose $v_n=u_n+c$. on cherche à quelle condition sur c, v est géométrique.

$$v_{n+1}=u_{n+1}+c=\frac{1}{2}u_n+1+c=\frac{1}{2}(v_n-c)+1+c=\frac{1}{2}v_n-\frac{1}{2}c+1+c$$

En imposant $-\frac{1}{2}c+1+c=0$, v est une suite géométrique

$$c=-2, v_0=u_0+c=-25, v_n=v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n=-25\left(\frac{1}{2}\right)^n\Rightarrow u_n=-25\left(\frac{1}{2}\right)^n+2$$

Cette technique permet de passer d'une forme récurrente à une forme explicite de u mais aussi de déterminer sa limite en + ∞

$\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$

3 – Rapidité de convergence d'une suite

Evoquons la notion de rapidité de convergence sur un exemple. On considère les suites u et v définies par :

$$n>0, u_0=-23, u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+1 \; et \; v_n=2-\frac{5}{n}$$

u est la suite étudiée précédemment et on a : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 2 \; et \lim_{n \to +\infty} v_n = 2$

u et v convergent toutes les deux vers 2, mais comment estimer la rapidité de convergence de l'une par rapport à l'autre ?

Réponse : on considère le rapport $t_n = \frac{u_n-2}{v_n-2}$

Etudions la limite éventuelle de la suite ainsi créée

$$t_n = \frac{-25\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{-5}{n}} = 5n\left(\frac{1}{2}\right)^n \; et \lim_{n \to +\infty} t_n = 0$$

Cette limite étant nulle, on dira que u converge plus vite vers 2 que v