**PROBABILITE**

# Table des matières

# I – Généralités

## 1 – Activités, vocabulaire et rappels

**A1** – Jeannot lance un dé

Jeannot se livre à une expérience simple qui consiste à lancer un dé à 6 faces et à repérer la face supérieure. Voici un tableau récapitulatif du vocabulaire usuel des probabilités

| Mot courant | jeu | résultat | Ensemble des résultats | cas de figure |
|---|---|---|---|---|
| Synonyme | Expérience aléatoire | Événement élémentaire | Univers des possibles | événement |

Voici quelques remarques simples, reliant ces notions :

- Un jeu donne des résultats. Dans le cas présent, il y en a 6. Un exemple de résultat est : « Jeannot obtient 3 »
- Un événement est une union de résultats. Quelques exemples : « Jeannot obtient un nombre pair » (3résultats) ; « Jeannot n'obtient pas 3 » (5 résultats) ; « Jeannot obtient 4 ou 6 » (2 résultats)

Comment définir une probabilité à partir de cette expérience ?
Réponse :

- En associant à chaque résultat un nombre quelconque compris entre 0 et 1
- En imposant que la somme de tous ces nombres soit égal à 1
- La probabilité d'un événement est alors la somme des probabilités des résultats le composant

On note les événements suivants :
A : « Jeannot obtient 5 »
B : « Jeannot n'obtient pas 3 »
C : Jeannot obtient 1 ou 2 »
D : « Jeannot obtient un nombre pair »
F : 'Jeannot obtient un nombre impair »

Exemple 1 :

| résultat $e_i$ $1 \leq i \leq 6$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité de $e_i$ : $P(e_i)$ | 0,1 | 0,05 | 0,05 | 0,3 | 0,4 | 0,1 |

Vérifions la somme des nombres associés aux résultats : 0,1 + 0,05 + 0,05 + 0,3 + 0,4 + 0,1 = 1 ouf!!
Dans le cadre de cet exemple :
P(A) = 0,4
P(B) = 0,1 + 0,05 + 0,3 + 0,4 + 0,1 = 1 – 0,05 = 0,95
P(C) = 0,1 + 0,05 = 0,15
P(D) = 0,05 + 0,3 + 0,1 = 0,45
P(F) = 1 – P(D) = 0,55

Exemple 2 :
On se place dans le cas où le dé est dit parfait. Dans ce cas, on décide alors de ne privilégier aucun résultat et d'attribuer à chaque résultat le MEME nombre. C'est le cas classique d'EQUIPROBABILITE

Le tableau de probabilité devient :

| résultat $e_i$ $1 \leq i \leq 6$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité de $e_i$ : $P(e_i)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

Dans le cadre de cet exemple :

P(A) = $\frac{1}{6}$

P(B) = $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

P(C) = $\frac{2}{6}$

P(D) = $\frac{3}{6}$

P(F) = $\frac{3}{6}$

Rappel :

Soit E un univers des possibles et P une probabilité définie sur E. Soit A et B deux événements
P(E) = 1
P(∅) = 0
Si A et B sont disjoints (A ∩ B = ∅) : P(A ∪ B) = P(A) + P(B)
Cas général : P(A ∪ B) = P(A) + P(B) – P(A ∩ B)
On note $\bar{A}$ le complémentaire de A dans E : $P(\bar{A})=1-P(A)$

---

**A2** : Jeannette utilise des tableaux pour recenser une population lors d'une étude
On remarque que dans un groupe de 200 élèves, 135 se lèvent tôt, 145 arrivent à l'heure dans leur établissement, et 110 se lèvent tôt et arrivent à l'heure

Dans un premier temps, Jeannette fait un tableau d'effectifs

| | Arrivent à l'heure (H) | Arrivent en retard (R) | Total |
|---|---|---|---|
| Se lèvent tôt (LTO) | 110 | 135 – 110 = 25 | 135 |
| Se lèvent tard (LTA) | 145 – 110 = 35 | 55 – 25 = 65 – 35 = 30 | 200 – 135 = 65 |
| Total | 145 | 200 – 145 = 55 | 200 |

Dans ce tableau 30 représente le nombre d'élèves se levant tard ET arrivant en retard.

Rappel :

Soit E un univers des possibles fini et P une probabilité définie sur E. On se place dans le cas particulier de l'équiprobabilité des résultats. Soit A un événement

$$P(A)=\frac{nombre\,de\,résultats\,favorables\,à\,A}{nombre\,total\,de\,résultats}$$

Tableau (1/3) des fréquences par rapport à l'effectif total
Ce tableau est obtenu à partir du tableau des effectifs et en divisant chaque nombre par l'effectif total.
C'est le tableau des probabilités

| | Arrivent à l'heure (H) | Arrivent en retard (R) | Total |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| Se lèvent tôt (LTO) | $\frac{110}{200}=0{,}55$ | $\frac{25}{200}=0{,}125$ | $\frac{135}{200}=0{,}675$ |
| Se lèvent tard (LTA) | $\frac{35}{200}=0{,}175$ | $\frac{30}{200}=0{,}15$ | $\frac{65}{200}=0{,}325$ |
| Total | $\frac{145}{200}=0{,}725$ | $\frac{55}{200}=0{,}275$ | 1 |

Avec l'aide du tableau, on obtient : P(LTA $\cap$ R ) = 0,15

Tableau (2/3) des fréquences par rapport aux totaux en ligne
Ce tableau est obtenu à partir du tableau des effectifs et en divisant chaque nombre par l'effectif total de la ligne correspondante. C'est un tableau de probabilités conditionnelles

| | Arrivent à l'heure (H) | Arrivent en retard (R) | Total |
|---|---|---|---|
| Se lèvent tôt (LTO) | $\frac{110}{135}\approx 0{,}815$ | $\frac{25}{135}\approx 0{,}185$ | 1 |
| Se lèvent tard (LTA) | $\frac{35}{65}\approx 0{,}538$ | $\frac{30}{65}\approx 0{,}462$ | 1 |

D'après le tableau : En considérant que l'élève se lève tôt, la probabilité qu'il arrive à l'heure est de 0,815

Tableau (3/3) des fréquences par rapport aux totaux en colonne
Ce tableau est obtenu à partir du tableau des effectifs et en divisant chaque nombre par l'effectif total de la colonne correspondante. C'est un tableau de probabilités conditionnelles

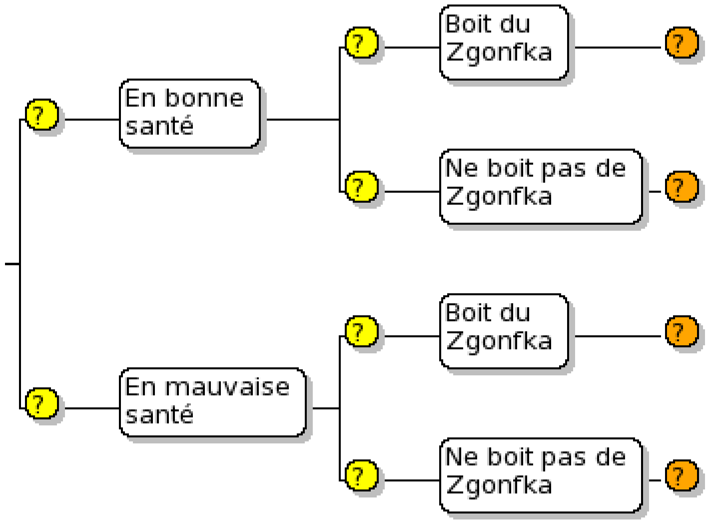
| | Arrivent à l'heure (H) | Arrivent en retard (R) |
|---|---|---|
| Se lèvent tôt (LTO) | $\frac{110}{145}\approx 0{,}759$ | $\frac{25}{55}=0{,}455$ |
| Se lèvent tard (LTA) | $\frac{35}{145}\approx 0{,}241$ | $\frac{30}{55}=0{,}545$ |
| Total | 1 | 1 |

D'après le tableau : En considérant que l'élève arrive à l'heure, la probabilité qu'il se lève tôt est de 0,759

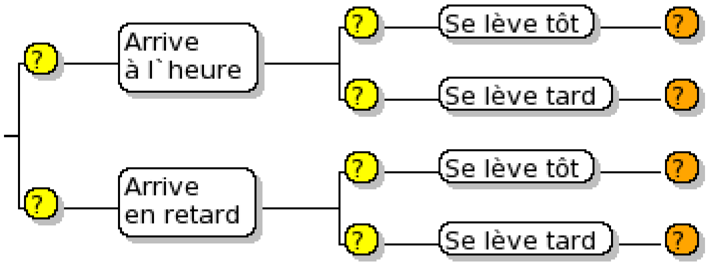
---

**A3** : des arbres pour recenser des configurations possibles
Souvent, on est amené à étudier l'imbrication de deux caractères, chaque caractère ayant généralement deux ou trois valeurs possibles

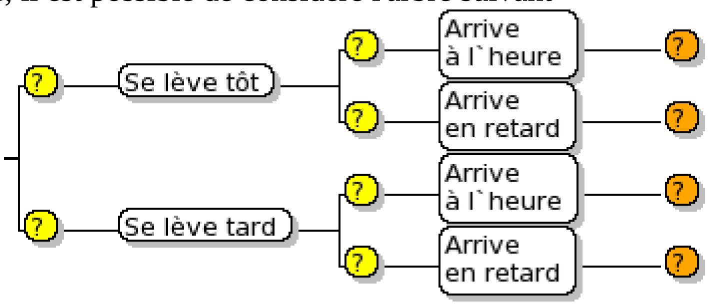
Exemple 1 : Un sujet en bonne santé ou en mauvaise santé boit ou non la nouvelle boisson à la mode, le Zgonfka



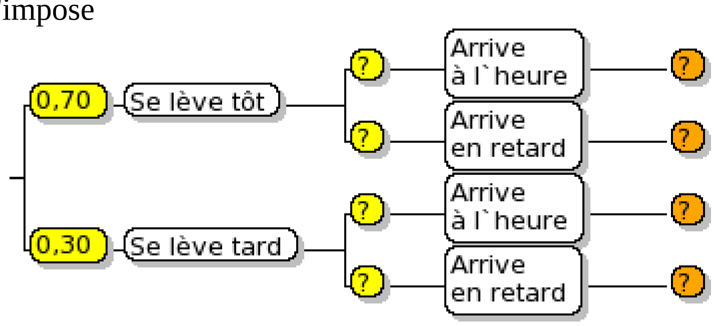

Exemple 2 : Un élève arrive à l'heure ou en retard au lycée, alors qu'il peut se lever tôt ou tard



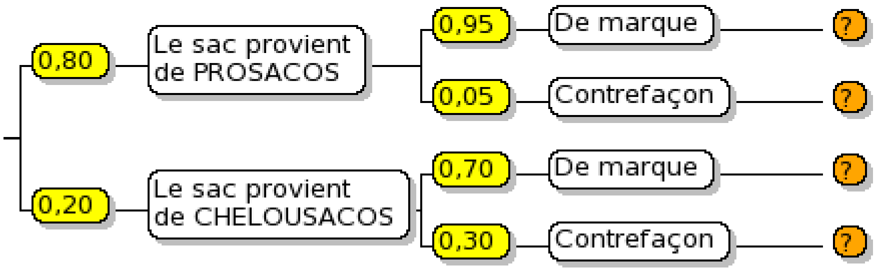

En fonction de l'étude, il est possible de considère l'arbre suivant




Le choix se fera en fonction de l'énoncé. Bien souvent, ce sont les pondérations associées à l'arbre qui rendront le choix évident. Par exemple, si l'étude indique que 70% des élèves se lèvent tôt, sans autre indication, le choix s'impose




Exemple 3 : Sophie choisit un sac dans un magasin. Le magasin a deux fournisseurs, PROSACOS et CHELOUSACOS, qui représente respectivement 80% et 20% du stock. Une étude montre que 95% des sacs provenant de PROSACOS sont des sacs de marque et 70% des sacs provenant de CHELOUSACOS sont des sacs de marque, le reste étant des contrefaçons. Voici un arbre décrivant cette situation.




Les pondérations proviennent des proportions issues de l'énoncé

# II – Probabilité conditionnelle

Soit E un univers fini de résultats issus d'une expérience et P une probabilité définie sur E

### *1 – Définitions*

Soit A un événement possible : $P(A)\neq 0$

On définit l'application $P_A$ de E vers l'ensemble des réels de la façon suivante :
Pour tout événement B de E : $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

**Théorème** : On admet que cette application est une probabilité sur E. Elle est notée probabilité conditionnelle
$P_A$ (B) : « probabilité de B sachant que A est réalisé » ou plus simplement « probabilité de B sachant A »

**Remarques** : B et C sont deux événements de E

- $P_A$ (A) = 1
- $Si\ A\subset B\Rightarrow P_A(B)=1$
- Si A et B sont possibles et incompatibles $(A\cap B=\emptyset), P_A(B)=0\ et\ P_B(A)=0$
- $Si\ B\subset C\Rightarrow P_A(B)\leq P_A(C)$
- $P_A$ étant une probabilité, on a : $P_A(B\cup C)=P_A(B)+P_A(C)-P_A(B\cap C)$
- Cas particulier : $B\cap C=\emptyset\Rightarrow P_A(B\cup C)=P_A(B)+P_A(C)$

### *2 – Formule des probabilités totales*

**Définition** : Partition de E
Soit n un entier, n > 1. Une famille de n événements possibles $A_i\ (1\leq i\leq n)$ forme une partition de E si les événements sont disjoints deux à deux et l'union de cette famille est égale à E
$(1\leq i,j\leq n, i\neq j, A_i\cap A_j=\emptyset\ et\ A_1\cup A_2\cup ...\cup A_n=E)$

Exemple 1 : Soit A un événement possible de E et différent de E. A et son complémentaire $\overline{A}$ forment une partition de E

Exemple 2 : Une expérience consiste à choisir un élève au hasard dans un lycée. On définit les événements suivants
S : « Il vient de Seconde »
P : « Il vient de Première »

T : « Il vient de Terminale »
S, P, T forment une partition de E, l'univers des possibles de cette expérience

**Théorème** : Soit B un événement de E et une partition de E ( $A_i \ (1 \le i \le n)$ ). P(B) se calcule des façons suivantes :

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)=\sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B) \times P(A_i)$$

En effet : partons de l'égalité

$$E=A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \Rightarrow B \cap E=B=B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \Rightarrow B=(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$$

On en déduit : $P(B)=P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n))$

$Soit\ x\ de\ (B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) (1 \le i, j \le n, i \ne j) \Rightarrow x \in B \cap A_i\ et\ x \in B \cap A_j \Rightarrow x \in B\ et\ x \in A_i \cap A_j$ Impossible

Appliquons les propriétés des probabilités

$$P(B)=P(B \cap A_1)+P(B \cap A_2) \cup \ldots \cup P(B \cap A_n)=\sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

Chaque $A_i$ étant un événement possible on a : $P(B \cap A_i)=P_{A_i}(B) \times P(A_i)$

On en déduit : $P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)=\sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B) \times P(A_i)$

**Cas particulier** : La partition de E est composée d'un événement A et son complémentaire. Dans ce cas

$$P(B)=P(B \cap A)+P(B \cap \overline{A})=P_A(B) \times P(A)+P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A})$$

Quelques applications :

**A1** : Bal costumé

Jo organise une bal costumé où sont invités les habitants des trois communes de Guapo, Lindo et Bonito. Il constate avec déception que malgré les consignes, beaucoup de personnes sont venues sans déguisement. D'après ses calculs, il y a à la soirée 800 habitants de Guapo dont 30% déguisés, 600 de Lindo dont 90% déguisés et 500 de Bonito dont 70 % déguisés. En choisissant une personne au hasard dans la soirée, quelle est la probabilité qu'elle soit déguisée ?

Remarquons qu'il y a 1900 personnes en tout
On définit les trois événements suivants :
G : « la personne vient de Guapo »
L : « la personne vient de Lindo »
B : « la personne vient de Bonito »
Bien entendu ces événements forment une partition de l'univers des possibles de notre expérience
On définit D l'événement : « la personne est déguisée »
P(D) se calcule par la formule des probabilités totales :

$$P(D)=P_G(D) \times P(G)+P_L(D) \times P(L)+P_B(D) \times P(B)$$

On a : $P(G)=\frac{800}{1900}, P(L)=\frac{600}{1900}, P(B)=\frac{500}{1900}, P_G(D)=0{,}30, P_L(D)=0{,}90, P_B(D)=0{,}70$

$$P(D)=\frac{1130}{1900} \approx 0{,}595$$

---

**A2** : Faire le bon choix

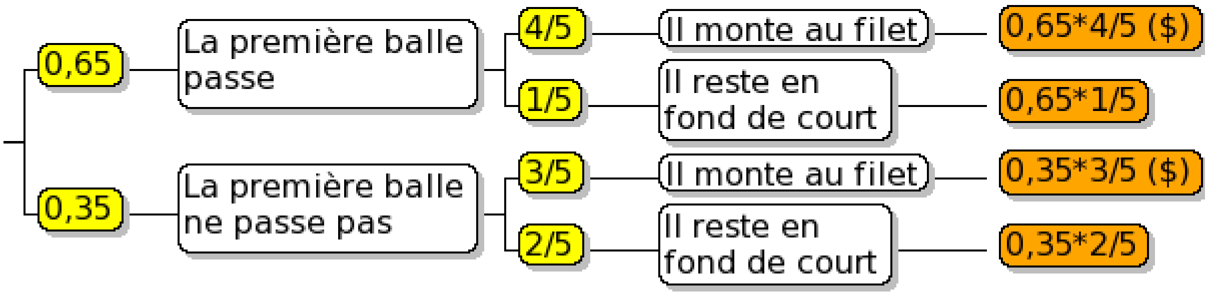
Sophie choisit un sac dans un magasin. Le magasin a deux fournisseurs, PROSACOS et CHELOUSACOS, qui représente respectivement 80% et 20% du stock. Une étude montre que 95% des sacs provenant de PROSACOS sont des sacs de marque et 70% des sacs provenant de CHELOUSACOS sont des sacs de marque, le reste étant des contrefaçons. Quelle est la probabilité pour que le sac choisi soit de marque ?

On définit les deux événements suivants :
$F_1$ : « le sac provient de PROSACOS »
$F_2$ : « le sac provient de CHELOUSACOS »
Bien entendu ces événements forment une partition de l'univers des possibles de notre expérience
On définit M l'événement : « le sac est de marque »
P(M) se calcule par la formule des probabilités totales : $P(M)=P_{F_1}(M)\times P(F_1)+P_{F_2}(M)\times P(F_2)$
On a : $P(F_1)=0{,}80\,,P(F_2)=0{,}20\,,P_{F_1}(M)=0{,}95\,,P_{F_2}(M)=0{,}70$
$P(M)=0{,}90$

### *3 – Arbres pondérés*

De manière générale, un arbre pondéré permet de décrire un ensemble de configurations possibles en y attribuant des probabilités. L'arbre se compose de noeuds dont le noeud de départ et de branches reliant deux noeuds. Chaque noeud est relié au noeud de départ par un unique chemin composé de branches

**Exemple 1** : Grob est un joueur de tennis d'un bon niveau qui à la réputation de monter au filet sur son service. En effet, son entraineur dit de lui que la première balle passe à 65 %, sur la première balle il monte 4 fois sur 5 et sur la deuxième, 3 fois sur 5. Utilisons un arbre pondéré pour décrire cette situation



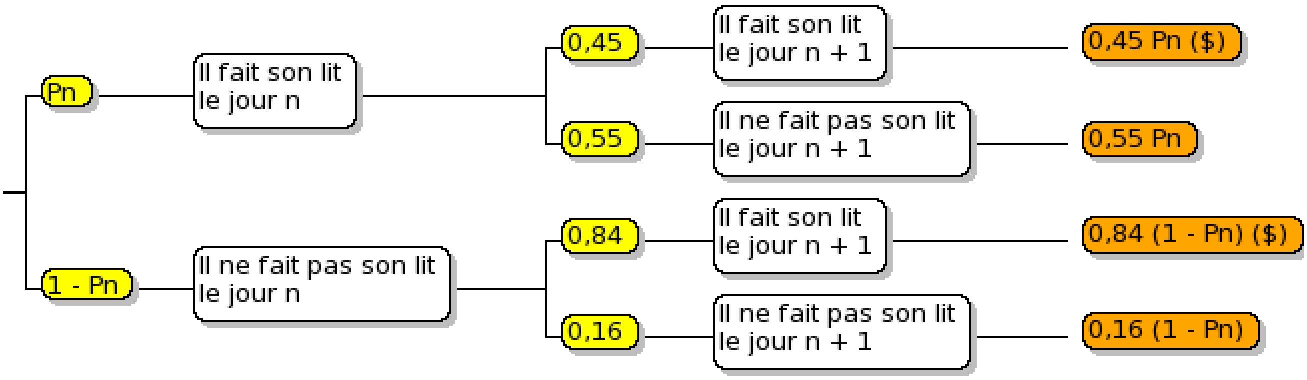

On note les événements suivants :
B : « la première balle passe »
F : « Il monte au filet »
L'arbre permet de repérer les probabilités suivantes :
$$P(B)=0{,}65\,;P_B(F)=\frac{4}{5}\,;P_{\overline{B}}(F)=\frac{3}{5}\,;P(B\cap F)=\frac{0{,}65\times4}{5}\,;P(\overline{B}\cap F)=\frac{0{,}35\times3}{5}$$

($) repère les chemins favorables à F. La formule des probabilités totales se traduit en sommant les nombres correspondants
$$P(F)=P(B\cap F)+P(\overline{B}\cap F)=0{,}73$$

**Exemple 2** : Jaric est un petit garçon bien gentil, qui veut faire plaisir à ses parents. Il décide un matin, avec une probabilité de $p_1$ , de faire son lit, puis les jours suivants :
- S'il a fait son lit la veille, il le fait le matin avec une probabilité de 0,45
- S'il n'a pas fait son lit la veille, il le fait le matin avec une probabilité de 0,84

On note :
l'événement $A_n$ : « Jaric fait son lit le jour n »
$p_n = P(A_n)$

L'énoncé nous indique : $P_{A_n}(A_{n+1})=0{,}45\,;P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})=0{,}84$
Utilisons un arbre pondéré pour décrire cette situation




($) repère les chemins favorables à $A_{n+1}$
On obtient : $p_{n+1}=P(A_{n+1})=P_{A_n}(A_{n+1})\times P(A_n)+P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})\times P(\overline{A_n})\Rightarrow p_{n+1}=0{,}45\,p_n+0{,}84(1-p_n)$
D'où : $p_{n+1}=-0{,}40\,p_n+0{,}84$
La suite ainsi définie est arithmético-géométrique (voir le résumé de cours sur les suites). Cette suite ($p_n$) converge vers une limite finie L, vérifiant la relation de récurrence : $L=-0{,}40\,L+0{,}84\Rightarrow L=0{,}6$
Cette limite correspond à une probabilité moyenne quotidienne et les parents de Jaric pourront dire « Notre fils fait son lit 6 fois sur 10 »

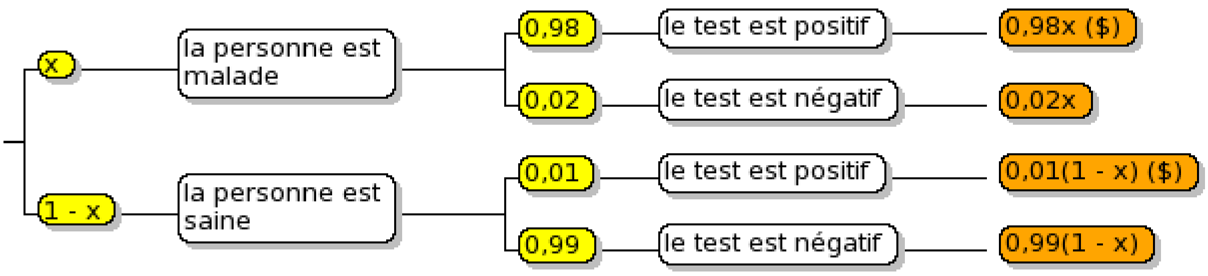
**Exemple 3** : Test de dépistage
On considère qu'une certaine maladie sévit dans une population. Un test existe afin de dépister cette maladie chez chaque individu, mais comme toute chose, le test n'est pas fiable à 100%, il peut indiquer qu'une personne est saine (test négatif) , alors qu'elle est en réalité malade, il peut indiquer qu'une personne est malade (test positif) alors qu'elle est heureusement saine.
Ce qu'on sait :

- 98 % des malades ont un test positif
- 1 % des personnes saines ont un test positif

Ce qu'on ne connait pas :

- la proportion de personnes malades x

On choisit une personne au hasard dans cette population. On note M et T les événements :
M : « elle est malade »
T ; « le test est positif »
On définit : $f(x)=P_T(M)$ . f est à déterminer
On note F le seuil de fiabilité du test. On dira que le test est fiable si f(x) ≥ F
Utilisons un arbre pondéré pour décrire cette situation




($) repère les chemins favorables à T
On obtient : P(T) = 0,98x + 0,01 (1 – x) = 0,97x + 0,01

$$f(x)=P_T(M)=\frac{P(T\cap M)}{P(T)}=\frac{0{,}98\,x}{0{,}97\,x+0{,}01}=\frac{98\mathrm{x}}{97\mathrm{x}+1}$$

$$f(x)\geq F\Leftrightarrow\frac{98\mathrm{x}}{97\mathrm{x}+1}\geq F\Leftrightarrow 98\mathrm{x}\geq F(97\mathrm{x}+1)\Leftrightarrow x\geq\frac{F}{98-97\,F}$$

Application numérique : F = 0,95
le test est fiable si le pourcentage de personnes malades dépasse 17 % (au pour cent près)

**Régles à retenir : Arbres**

- Les probabilités des branches issues d'un noeud ont pour somme 1
- La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches le constituant
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins favorables (où apparaît l'événement)

### *4 – événements indépendants*

**Définition** : événements indépendants
Soit A et B deux événements. On dit que A et B sont indépendants si : $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

Remarque : Soit A et B deux événements possibles et indépendants

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)\times P(B)}{P(A)}=P(B)$$

$$P_B(A)=\frac{P(B\cap A)}{P(B)}=\frac{P(B)\times P(A)}{P(B)}=P(A)$$

Remarque : Soit A et B deux événements indépendants
Comme écrit précédemment :

$$E=A\cup\overline{A}\Rightarrow B=(B\cap A)\cup(B\cap\overline{A})\Rightarrow P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap\overline{A})=P(B)\times P(A)+P(B\cap\overline{A})$$

On en déduit : $P(B\cap\overline{A})=P(B)-P(B)\times P(A)=P(B)(1-P(A))=P(B)\times P(\overline{A})$

$\overline{A}$ et B sont donc des événements indépendants

De même :
$A$ et $\overline{B}$ sont des événements indépendants
$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont des événements indépendants

Ces remarques confirment le sens de la notion d'indépendance. En effet, si A et B sont deux événements indépendants : $P_A(B)=P_{\overline{A}}(B)=P(B)$ . La probabilité de B ne dépend pas de la réalisation de A

Exemple 1 : Dans un groupe de 200 personnes, on remarque que 160 jouent de la guitare, 110 connaissent le solfège et x jouent de la guitare et connaissent le solfège. On choisit une personne au hasard dans ce groupe. On note G et S les événements suivants.
G : « il joue de la guitare »
C : « il connait le solfège »

– On suppose que x = 80. G et S sont-ils indépendants ?

$$P(G)=\frac{160}{200}=0{,}8\,;P(S)=\frac{110}{200}=0{,}55\,;P(G)\times P(S)=0{,}8\times 0{,}55=0{,}44\,;P(G\cap S)=\frac{80}{200}=0{,}4$$

Les événements G et S ne sont pas indépendants

– A quelle condition G et S sont indépendants ?

$$P(G\cap S)=P(G)\times P(S)\Leftrightarrow\frac{x}{200}=0{,}8\times 0{,}55=0{,}44\Leftrightarrow x=200\times 0{,}44=88$$

Les événements G et S sont indépendants lorsque x = 88

Exemple 2 : Soit A et B deux événements de E vérifiant : $P(A)=0{,}4\,,P(B)=0{,}3\,et\,P(A\cup B)=0{,}6$

Question : A et B sont-ils indépendants ?
$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0{,}1 \; et \; P(A)\times P(B)=0{,}3\times 0{,}4=0{,}12\neq P(A\cap B)$$
Réponse : NON

## *5 – Expériences indépendantes*

**Définition** : On considère une expérience constituée de plusieurs expériences successives. On dira que les expériences successives sont indépendantes si le déroulement et l'issue d'une des expériences n'influencent pas le déroulement et l'issue des autres

**Propriété** : On considère une expérience EX constituée de plusieurs expériences successives indépendantes $EX_i$ (i compris entre 1 et n). On admet que la probabilité d'un événement de EX est égale au produit des événements des $EX_i$ le composant

Exemple 1 : succession d'expériences différentes
Pierrette lance un dé parfait puis tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité p d'obtenir 1 avec le dé et une figure ?
On considère que les expériences sont indépendantes : $p=\frac{1}{6}\times\frac{3\times 4}{32}=\frac{1}{16}$

Exemple 2 : répétition de la même expérience
Pierrot lance six fois de suite un même dé.
Question et piège classique : va t-il obtenir un 1 à coup sûr ?
On considère que l'on reproduit 6 fois de suite la même expérience de façon indépendante.
On note A : « obtenir au moins une fois 1 »
Le complémentaire de A est l'événement $\overline{A}$ : « ne jamais obtenir 1 »
A chaque tirage, la probabilité de ne pas obtenir 1 est de $\frac{5}{6}$
Ainsi : $P(\overline{A})=\left(\frac{5}{6}\right)^6 \Rightarrow P(A)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^6\approx 0{,}665$

Réponse : NON

Exemple 3 : répétition de la même expérience
Kakish vend des voitures de luxe. Afin d'accroître son chiffre d'affaire, il prévoit de démarcher ses clients par téléphone. Par expérience, il sait que la probabilité qu'un client achète lors d'un démarchage est de p = 0,012
Question : combien de clients doit-il démarcher pour que la probabilité de vendre au moins une voiture soit supérieur ou égale à 0,99 ?
On note n le nombre d'appels. On note A : « obtenir au moins une réponse positive »
Le complémentaire de A est l'événement $\overline{A}$ : « n'obtenir aucune réponse positive »
On considère lors des appels téléphoniques que l'on reproduit n fois de suite la même expérience de façon indépendante.
A chaque appel, la probabilité d'obtenir une réponse négative est de 1 – p
Ainsi : $P(\overline{A})=(1-p)^n \Rightarrow P(A)=1-(1-p)^n$
$$P(A)\geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1-(1-p)^n\geq 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}01\geq (1-p)^n \Leftrightarrow \ln(0{,}01)\geq \ln((1-p)^n) \Leftrightarrow n\geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(1-p)}$$
Ce qui donne : $n\geq 381{,}45$
Réponse : Kakish doit prévoir au moins 382 appels

# III – Dénombrement

## *1 – Approche*

On considère un sac contenant n boules. On décide d'en choisir p de manière aléatoire. On propose trois modes opératoires : tirage successif AVEC remise, tirage successif SANS remise, tirage simultané

Tableau récapitulatif (résultats admis)

| Mode opératoire des tirages | Ordre des boules | contraintes | Nombre de tirages possibles | Vocabulaire associé |
|---|---|---|---|---|
| successif AVEC remise | important | | $n^p$ | p-liste |
| successif SANS remise | important | p ≤ n | $n(n-1)...(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ | arrangement permutation (p = n) |
| simultané | sans importance | p ≤ n | $\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$ | combinaison, « p parmi n », coefficient binomial |

Par convention : 0! = 1

Exemple 1 : On tire trois cartes successivement et au hasard d'un jeu de 32 cartes.
On note A l'événement : « les trois cartes sont des figures »
Calculons P(A) pour chaque mode opératoire

n = 32 et p = 3
Il y a 12 figures dans le jeu
Rappel : $P(A)=\frac{nombre\,de\,résultats\,favorables\,à\,A}{nombre\,total\,de\,résultats}$

| Mode opératoire des tirages | P(A) | Valeur apporchée à $10^{-4}$ |
|---|---|---|
| successif AVEC remise | $\frac{12^3}{32^3}$ | 0,0527 |
| successif SANS remise | $\frac{12\times 11\times 10}{32\times 31\times 30}$ | 0,0443 |

Exemple 2 : Une expérience consiste à tirer au hasard cinq cartes simultanément d'un jeu de 32 cartes.
Soit A et B les événements suivants.
A : « la main contient un as »
B : « la main contient un carré »
Calculer P(A) et P(B)

Concernant A, la main est constituée d'une carte à choisir parmi les 4 as, les autres étant à choisir parmi les 28 autres cartes n'étant pas des as

$$P(A)=\frac{\binom{4}{1}\binom{28}{4}}{\binom{32}{5}}=\frac{4\times 28!5!27!}{4!24!32!}=\frac{4\times 28\times 27\times 26\times 25\times 5}{32\times 31\times 30\times 29\times 28}=\frac{2925}{7192}\approx 0,407$$

Concernant B, en imposant un carré particulier (carré de 7 par exemple), la cinquième carte de la main est à choisir dans les 28 autres cartes (tout sauf le 7 dans notre exemple) et Il y a 8 carrés possibles

$$P(A)=\frac{8\times 28}{\binom{32}{5}}=\frac{8\times 28\times 5!27!}{32!}=\frac{8\times 28\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{32\times 31\times 30\times 29\times 28}=\frac{1}{899}$$

## 2 – Propriétés des combinaisons

E est un ensemble fini contenant n éléments

**Définition** : soit p un entier naturel inférieur ou égal à n. Une combinaison de p éléments de E est une partie de E à p éléments.

**Théorème admis** : Le nombre de combinaisons de p éléments dans un ensemble à n éléments est égal à $\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$ (« p parmi n »)

**Remarques** :

- « p parmi n » représente le nombre de tirages simultanés de p éléments dans un ensemble à n éléments
- $\binom{n}{0}=1$
- $\binom{n}{1}=n$
- $\binom{n}{n}=1$
- $0\leq p\leq n : \binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$

En effet : $\binom{n}{n-p}=\frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!}=\binom{n}{p}$

- $0\leq p<n : \binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$

En effet :

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\frac{n!}{p!(n-p)!}+\frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!}=\frac{n!}{p!(n-p-1)!}(\frac{1}{n-p}+\frac{1}{p+1})=\frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!}$$

Conclusion : $\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$

**Théorème** : Soit a et b deux réels, alors pour tout entier n ≥ 1: $(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p$

(C'est la formule du binôme de Newton)

En effet : Raisonnement par récurrence

- La relation est vraie pour n = 1

$(a+b)^1 = a+b = \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1$

- On suppose que la relation est vraie à l'ordre n, montrons que la relation est vraie à l'ordre n + 1

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^{p+1}$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p+1-1} a^{n+1-(p+1)} b^{p+1}$$

Dans la deuxième somme, on remplace p + 1 par p, les bornes de la somme devenant 1 et n + 1

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n+1-p} b^p + \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n}{p-1} a^{n+1-p} b^p$$

$$\Rightarrow (a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} \left[\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}\right] a^{n+1-p} b^p + b^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} \binom{n+1}{p} a^{n+1-p} b^p + b^{n+1}$$

Ce qui donne : $(a+b)^{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} a^{n+1-p} b^p$ OK !

Conclusion :pour tout entier n ≥ 1: $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$

**Remarques** :

- En prenant a et b égaux à 1, on obtient : $2^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$

Cette relation permet de retrouver le nombre de parties d'un ensemble fini contenant n éléments : $2^n$

- Penser au célèbre triangle de Pascal pour retrouver les coefficients binomiaux de la formule du binôme de Newton

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n = 1 | 1 | 1 | | | | | |
| n = 2 | 1 | 2 | 1 | | | 2 = 1 + 1 | $(a+b)^2 = 1\,a^2 + 2\,ab + 1\,b^2$ |
| n = 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | 3 = 1 + 2 ; 3 = 2 + 1 | |
| n = 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | 4 = 1 + 3 ; 6 = 3 + 3 ; 4 = 3 + 1 | |
| n = ... | | | | | | | |

# IV – Lois de probabilité

## *1 – Variable aléatoire*

**Définition** : On se place sur $\Omega = \{e_1, \ldots, e_n\}$ , un univers fini de possibles d'une expérience aléatoire, sur lequel une probabilité P est définie. Une variable aléatoire X est une fonction de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ . On associe ainsi à chaque résultat une valeur réelle. Ces valeurs ne sont pas obligatoirement distinctes et on les note $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k \, (k \leq n)$ .

Définir la loi de probabilité de X, c'est recenser les valeurs distinctes prises par X et associer à chaque valeur $x_i$ la probabilité de l'événement ($X = x_i$), notée $p_i = P(X = x_i)$

**Définitions** :

Espérance ou moyenne d'une variable aléatoire X : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Variance d'une variable aléatoire X : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2$

Ecart-type d'une variable aléatoire X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

**Exemple** : le JOMPI est-il un jeu équitable ?
Le JOMPI est un jeu dont les modalités suivent :

le joueur s'acquitte d'une mise de départ de 5 euros puis il tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes

| Cas de figure | Gain en euros |
|---|---|
| Il tire la dame de pique | 100 |
| Sinon il tire une dame | 10 |
| Sinon il tire une figure | 1 |
| Sinon | 0 |

On s'intéresse à la loi de probabilité de la variable aléatoire associée aux gains relatifs du JOMPI. Les valeurs prises sont 95, 5, - 4, - 5

| Les $x_i$ | 95 | 5 | -4 | -5 |
|---|---|---|---|---|
| Les $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{3}{32}$ | $\frac{8}{32}$ | $\frac{20}{32}$ |

E(X) = $\frac{1\times 95+3\times 5-8\times 4-20\times 5}{32}=\frac{-22}{32}=\frac{-11}{16}\approx -0,69\neq 0$
Le JOMPI n'est pas un jeu équitable, le joueur perdant en moyenne E(X) euros

Que faire pour le rendre équitable ? Une solution est de modifier le gain maximal,noté x, afin d'obtenir E(X) = 0
Ce qui donne : $E(X)=0\Leftrightarrow 1\times(x-5)+3\times 5-8\times 4-20\times 5=0\Leftrightarrow x=122$
Le gain maximal passe de 100 à 122 Euros

**Définition** : variables aléatoires indépendantes X et Y
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $\Omega$ , prenant respectivement les valeurs $x_{1,}\dots,x_i,\dots,x_k$ et $y_{1,}\dots,y_j,\dots,y_m$ . On dit que X et Y sont indépendantes lorsque les événements ($X = x_i$) et ($Y = y_i$) sont indépendants deux à deux, c'est-à-dire :
$P(X=x_i\cap Y=y_j)=P(X=x_i)\times P(Y=y_j)\, pour\ 1\leq i\leq k\ et\ 1\leq j\leq m$

## *2 – Lois discrètes*

On se place sur $\Omega=\{e_{1,}\dots,e_n\}$ , un univers fini de possibles d'une expérience aléatoire, sur lequel une probabilité P est définie. X est une variable aléatoire définies sur $\Omega$

a – Loi de Bernoulli

On considère une variable aléatoire X donnant deux résultats, 0 (échec) et 1 (succès). La loi de probabilité se résume à :

| Les $x_i$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| Les $P(X = x_i)$ | q | p |

Bien entendu : q + p = 1

On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p

Définition : Epreuve de Bernoulli

Un épreuve de Bernoulli, est une expérience aléatoire donnant deux résultats, l'échec et le succès. Bien entendu, la variable aléatoire X associée à cet univers, prenant la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, suit une loi de Bernoulli de paramètre p (p = P(X = 1))

**propriétés** : On suppose que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p

- E(X) = p

En effet : $E(X)=q\times 0+p\times 1=p$

- V(X) = p(1 – p)

En effet : $V(X)=q\times(0-p)^2+p\times(1-p)^2=(1-p)p^2+p(1-p)^2=p(1-p)(p+1-p)=p(1-p)$

Exemple : Ce matin, il pleut et on constate que sur les 31 élèves de la classe, 24 ont un parapluie.

On choisit un élève au hasard. On définit la variable aléatoire X qui associe 1 si l'élève choisi a un parapluie, 0 sinon

P(X = 0) = P(« l'élève choisi n'a pas de parapluie ») = $\frac{7}{31}$

P(X = 1) = P(« l'élève choisi a un parapluie ») = $\frac{24}{31}$

| Les $x_i$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| Les P(X = $x_i$) | $\frac{7}{31}$ | $\frac{24}{31}$ |

b – Loi binomiale

On répète n fois une épreuve de Bernoulli de paramètre p, de manière indépendante. On note X la variable aléatoire qui repère le nombre de succès. X est appelée loi binomiale de paramètre n et p, notée B(n, p). X prend les valeurs 0, 1, …, n soit n + 1 valeurs

**Théorème admis** : Soit X une loi binomiale B(n, p). On admet que la loi de probabilité de X est définie par : $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

**Remarques** :

- $\sum_{k=0}^{n}P(X=k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=1^n=1$
- $P(X=0)=\binom{n}{0}(1-p)^n=(1-p)^n$
- $P(X=n)=\binom{n}{n}p^n=p^n$

**propriétés** : On suppose que X suit une loi binomiale de paramètre n et p

- E(X) = np

En effet : $E(X)=\sum_{k=0}^{n}P(X=k)\times k=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$

$$\Rightarrow E(X)=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k}(1-p)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{k!(n-1-k)!}p^{k+1}(1-p)^{n-1-k}$$

$$\Rightarrow E(X)=np\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}p^{k}(1-p)^{n-1-k}=np(p+1-p)^{n-1}=np$$

- V(X) = np(1 – p)

Exemple : Aline recherche activement un emploi. Elle envoie son CV à n (on prendra n = 20) entreprises dans l'espoir de décrocher un entretien. En consultant internet, elle comprend que la probabilité qu'un courrier déclenche un appel de la part de l'entreprise est de p (on prendra p = 0,1). En considérant que chaque courrier est une expérience indépendante des autres, calculer la probabilité des événements :

A : « elle décroche au moins un entretien »

B : « elle décroche au moins deux entretiens »

Ici on repère le nombre de courriers aboutissant à un succès c'est-à-dire à un entretien, c'est une loi binomiale de paramètres 100 et 0,1 : $P(X=k)=\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k}$

P(A) = P(X > 0) = 1 – P(X = 0)

P(B) = P(X > 1) = 1 – P(X = 0) – P(X = 1)

Ainsi : $P(A)=1-\binom{n}{0}(1-p)^{n}=1-0{,}9^{20}\approx 0{,}8784$

$$P(B)=1-\binom{n}{0}(1-p)^{n}-\binom{n}{1}p(1-p)^{n-1}=1-0{,}9^{20}-20\times 0{,}1\times 0{,}9^{19}\approx 0{,}6083$$

## *3 – Lois continues*

a – contexte

On se place dans le cas des variables aléatoires ayant des valeurs réelles. Le mieux est de prendre un exemple.

La société Précivis fabrique des vis de différentes tailles. Malgré la précision des ouvriers et des machines, la taille des vis fabriqués n'est pas rigoureusement égale à celle attendue. Prenons le cas des vis dont la taille attendue est de 30 mm. Lors des contrôles de qualité, on ne se posera pas la question de connaître la proportion de vis ayant exactement la taille de 30 mm mais plutôt de connaître la proportion de vis ayant une taille dans l'intervalle ] 30 – ε ; 30 + ε [ où la largeur de l'intervalle est imposée

On définit X la variable aléatoire repérant la taille des vis, on est amené à calculer : $P(X\subset J)$ , où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ . Dans le cadre du programme, on ramènera ce calcul de probabilité à un calcul d'intégrale sur l'intervalle J. Le tout maintenant, est de définir la fonction à intégrer

**Définition** : intégrales avec bornes infinies

Soit a et b deux réels. Soit f une fonction réelle telle que F(a, b) existe : $F(a,b)=\int_a^b f(t)\,dt$

- Si F(a, b) a une limite finie lorsque b tend vers + ∞ , on pose : $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(t)\,dt$
- Si F(a, b) a une limite finie lorsque a tend vers – ∞ , on pose : $\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(t)\,dt$

- En cas d'existence : $\alpha \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\alpha} f(t)\,dt + \int_{\alpha}^{+\infty} f(t)\,dt$

**Exemples** :

$$F(b)=\int_1^b \frac{dt}{t^2}=[\frac{-1}{t}]_1^b=1-\frac{1}{b}\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}=1$$

$$k>0, G(b)=\int_0^b e^{-kt}\,dt=[\frac{-1}{k}e^{-kt}]_0^b=\frac{1}{k}(1-e^{-kb})\Rightarrow\int_0^{+\infty}e^{-kt}\,dt=\frac{1}{k}$$

**Définition** :
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ . On dit que f est une **densité de probabilité** si elle vérifie les trois conditions suivantes :

- f est continue sur $\mathbb{R}$ , sauf en un nombre fini de valeurs
- f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt=1$

Exemples :

$$f(x)=\frac{1}{2}\,si\,x\in[1;3]\,sinon\,f(x)=0;\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=1$$

$$g(x)=\frac{1}{x^2}\,si\,x\geq 1\,sinon\,g(x)=0;\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\,dt=1$$

$$h(x)=e^{-x}\,si\,x\geq 0\,sinon\,h(x)=0;\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)\,dt=1$$

$$u(x)=\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2};\int_{-\infty}^{+\infty}u(t)\,dt=1$$

(admis) $v(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2+1};\int_{-\infty}^{+\infty}v(t)\,dt=1$

**Définition** :
Soit X une variable aléatoire réelle et f une densité de probabilité. On dit que X suit la loi de densité f lorsque : $P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$

**propriétés** : Soit X une loi continue de densité f, et a et b deux réels, a ≤ b. On suppose que f est une fonction bornée

- $P(X>a)=1-P(X\leq a)$
- $P(a<X\leq b)=\int_a^b f(t)\,dt$

En effet : $P(a<X\leq b)=P(X\leq b)-P(X\leq a)=\int_{-\infty}^{b}f(t)\,dt-\int_{-\infty}^{a}f(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt$

- $P(X=a)=0$

En effet : Soit n un entier naturel non nul. Soit M un réel tel que f(x) < M pour tout réel x

$0\leq P(X=a)\leq P(a-\frac{1}{n}<X\leq a)=\int_{a-\frac{1}{n}}^{a}f(t)dt\leq\frac{M}{n}$ et on conclut par passage à la limite

- $P(X<a)=P(X\leq a)$
- $P(a<X\leq b)=P(a<X<b)=P(a\leq X<b)=P(a\leq X\leq b)=\int_a^b f(t)dt$

b – loi uniforme
Soit X une variable aléatoire réelle. On se place dans le cas où la densité de probabilité associée f est **constante** sur un intervalle donné [a ; b]

on pose : $f(x)=\lambda \; si \; x\in[a;b] \; sinon \; f(x)=0 ; \int_a^b f(t)dt=\lambda(b-a)=1 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{b-a}$

**définition** :
Soit a et b deux réels (a < b) et X une variable aléatoire réelle. On dit que X suit la **loi uniforme** sur [ a ; b], lorsque X suit une loi à densité f avec : $f(x)=\frac{1}{b-a} \; si \; x\in[a;b] \; sinon \; f(x)=0$

**Application** : répartition uniforme des réels dans l'intervalle [1 ; 5]
On choisit un nombre au hasard dans l'intervalle [1 ; 5] . Déterminons la probabilité p que ce nombre soit dans l'intervalle  [2,4 ; 2;9]

$$p=\int_{2,4}^{2,9} \frac{1}{5-1} dt=\frac{0,5}{4}=0,125$$

c - loi exponentielle ou durée de vie sans vieillissement
Soit X une variable aléatoire réelle. On se place dans le cas où la densité de probabilité associée f une fonction de forme **exponentielle** sur l'intervalle [ 0 ; + ∞ [

on pose : $k>0, f(x)=\lambda e^{-kx} \; si \; x\geq 0 \; sinon \; f(x)=0 ; \int_0^{+\infty} f(t)dt=\frac{\lambda}{k}=1 \Rightarrow \lambda=k$

**définition** :
Soit k un réel (k > 0) et X une variable aléatoire réelle. On dit que X suit la **loi exponentielle** de paramètre k, lorsque X suit une loi à densité f avec : $f(x)=k e^{-kx} \; si \; x\geq 0 \; sinon \; f(x)=0$

**Remarques** :

- $P(X\leq a)=\int_0^a ke^{-kt} dt=[-e^{-kt}]_0^a=1-e^{-ka}$
- $P(X>a)=e^{-ka}$

**Remarque** : Expliquons le terme « sans vieillissement »
On se place dans le cas où X repère la durée de vie de certains éléments. Soit h > 0
on pose : $g(x,h)=P_{X>x}(X>x+h)$ .
Ainsi défini, g(x, h) représente la probabilité qu'un élément soit vivant à l'instant x + h sachant qu'il est vivant à l'instant x.
Appliquons la définition de la probabilité conditionnelle.

$$g(x,h)=\frac{P(X>x\cap X>x+h)}{P(X>x)}=\frac{P(X>x+h)}{P(X>x)}=\frac{e^{-k(x+h)}}{e^{-kx}}=e^{-kh}=P(X>h)$$

Waouh ! Grâce aux propriétés des exponentielles, g(x, h) NE dépend PAS de x, mais que de h. Cette faculté qui fait rêver certains humains se vérifient pour les élément radioactifs

**Exemple** : la durée de vie en heures d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre k égal à 4 $10^{-5}$ . Quelle est la probabilité que ce composant dure plus de 20 000 heures ?

Réponse : $P(X>20\,000)=e^{-k20000}=e^{-\frac{4\times 20\,000}{100000}}\approx 0{,}449$

## 4 – Adéquation à une loi équirépartie

a – approche

Essayons d'apporter une solution aux problèmes suivants :

- Jean lance un dé 50 fois et remarque que PILE a été obtenu 31 fois ? Cette pièce est-elle parfaite ?
- Pierre lance un dé 100 fois et remarque la répartition suivante, la face 1 (20 fois), la face 2 (18 fois), la face 3 (15 fois), la face 4 (10 fois), la face 5 (13 fois) et la face 6 (24 fois). Ce dé est-il truqué ?
- Mouloud est un artisan et fabrique des gâteaux de riz à partir d'un mélange de trois riz en proportion égale. Or en faisant un prélevé; il constate que sur 100 grains, 35 sont du type A, 45 sont du type B et le reste du type C. Son fournisseur s'est-il trompé ?
- Aline vend des téléphones portables ayant le même prix et les mêmes caractéristiques. Aujourd'hui; elle constate que sur les 80 vendus, 40 sont de la gamme Surf, 25 sont de la gamme Perfect et 15 de la gamme Brouf. Le nom de la gamme a-t-il influencé les acheteurs ?

A chaque fois, l'observation montre un écart évident avec une répartition uniforme et bien entendu, comme dans le cas de Jean, s'il recommence son expérience avec le même dé, on obtiendra un autre résultat (fluctuation d'échantillonnage). Comment faire alors, pour trouver un critère pour accepter ou refuser l'hypothèse l'équirépartition ?

**Réponse courte** :on compare l'écart entre l'observation faite et une répartition uniforme et un ensemble d'écarts entre les répartitions issus d'un modèle théoriquement équiréparti et la répartition uniforme

**Réponse longue** :

- Un expérience initiale consiste à répéter n fois une épreuve donnant k issues (exemple : on répète 50 lancers d'une même pièce donnant 2 issues, PILE ou FACE). Cette expérience sera l'observation
- On repère l'écart entre l'observation et la répartition uniforme grâce à l'indicateur :
  $e^2_{observée}=\sum_{i=1}^{k}(f_i-\frac{1}{k})^2$ où les $f_i$ sont les fréquences observées
- On simule à l'ordinateur N fois l'expérience à partir d'un modèle théoriquement équiréparti, chaque expérience simulant les n épreuves
- On détermine le décile D9 de la séries des N écarts $e^2$.
- Si $e^2_{observée}>D9$ , on rejette l'hypothèse d'équirépartition avec une erreur de 10% (au maximumu)
- Sinon si $e^2_{observée}\leq D9$ , on accepte l'hypothèse d'équirépartition avec une erreur de 10%