

Table des matières

I – Rappels.....	2
1 – Coordonnées dans le plan.....	2
2 – Equation d'une droite dans le plan.....	3
3 – Barycentre.....	3
II – Produit scalaire en 3D.....	5
1 – Définitions.....	5
2 – Orthogonalité dans l'espace.....	7
III – Représentation des droites et des plans.....	9
1 – Les plans.....	9
2 – Les droites.....	9
3 – Exercices classiques.....	10

I – Rappels

1 – Coordonnées dans le plan

On se place dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit M un point du plan. On note x (abscisse) et y (ordonnée) les coordonnées de M :

$$M(x; y) \Leftrightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

On note $\vec{OM} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$

La norme du vecteur \vec{OM} est définie par : $\|\vec{OM}\| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$

La distance entre deux points A et B est définie par : $AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Extension 3D : On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit M un point de l'espace. On note x (abscisse), y (ordonnée) et z (cote) les coordonnées de M :

$$M(x; y; z) \Leftrightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

On note $\vec{OM} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$

La norme du vecteur \vec{OM} est définie par : $\|\vec{OM}\| = OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

La distance entre deux points A et B est définie par : $AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Application : Soit deux points A(1 ; 2 ; 3) et B(-5 ; 9 ; 1)

• coordonnées

$$\vec{AB} \begin{vmatrix} -5-1 \\ 9-2 \\ 1-3 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{AB} \begin{vmatrix} -6 \\ 7 \\ -2 \end{vmatrix}$$

• Soit D(x ; y ; z) un point tel que $\vec{AD} = 2 \vec{AB}$

On obtient le système : $\begin{cases} x-1 = -12 \\ y-2 = 14 \\ z-3 = -4 \end{cases} \Rightarrow D(-11; 16; -1)$

• sphère

On recherche le lieu des points M(x ; y ; z) équidistants de A d'une distance 2. On écrit :

$$AM = 2 \text{ ou encore } AM^2 = 2^2 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 4$$

La relation obtenue est une équation de la sphère de centre A et de rayon 2 :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 10 = 0$$

• plan médiateur

On recherche le lieu des points M(x ; y ; z) à égale distance de A et de B. On écrit :

$$AM = BM \text{ ou encore } AM^2 = BM^2 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = (x + 5)^2 + (y - 9)^2 + (z - 1)^2$$

La relation obtenue est une équation cartésienne du plan médiateur de A et B :

$$-12x + 14y - 4z - 93 = 0$$

Notons que le milieu I de A et B appartient à cet ensemble, en effet :

$$I\left(\frac{1-5}{2}; \frac{2+9}{2}; \frac{3+1}{2}\right) \Rightarrow I\left(-2; \frac{11}{2}; 2\right) \text{ et } -12 \times (-2) + \frac{14 \times 11}{2} - 4 \times 2 - 93 = 24 + 77 - 8 - 93 = 0$$

2 – Equation d'une droite dans le plan

Soit D une droite définie dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit $M(x; y)$ un point du plan. On sait qu'il existe 3 réels a, b et c (a et b ne sont pas tous les deux nuls) tels que :

$$M \in D \Leftrightarrow ax + by + c = 0 \quad . \text{ Cette relation est appelée équation cartésienne de D}$$

Exemple : Soit deux points $A(1; 0)$ et $B(0; 2)$ du plan

On exprime que $M(x; y)$ est sur la droite (AB) en exprimant que les vecteurs \vec{AM} et \vec{AB} sont liés. Il existe ainsi un réel k tel que : $\vec{AM} = k \vec{AB}$

$$\vec{AB} \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix} . \text{ On obtient le système : } \begin{cases} x-1 = -k \\ y = 2k \end{cases} \Rightarrow y = -2x + 2$$

Réciproquement : si $y = -2x + 2$

$$\vec{AM} \begin{vmatrix} x-1 \\ y \end{vmatrix} \begin{matrix} = \frac{-y}{2} \\ \Rightarrow \vec{AM} = \frac{y}{2} \vec{AB} \end{matrix} \Rightarrow M \in D$$

Conclusion : $M(x; y) \in D \Leftrightarrow -2x - y + 2 = 0$

Que se passe t-il en 3D ?

Voyons cela sur un exemple : Soit trois points $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$ et $C(0; 0; 2)$ de l'espace. A, B et C ne sont pas alignés et on recherche une condition nécessaire et suffisante d'appartenance au plan P passant par ces 3 points.

On exprime que $M(x; y; z)$ est dans le plan P en exprimant que le vecteur \vec{AM} est une combinaison linéaire des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} . Il existe ainsi deux réels s et t tels que : $\vec{AM} = s \vec{AB} + t \vec{AC}$

$$\vec{AB} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \vec{AC} \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} . \text{ On obtient le système : } \begin{cases} x-1 = -s-t \\ y = s \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow x + y + \frac{z}{2} - 1 = 0$$

Réciproquement : si $x + y + \frac{z}{2} - 1 = 0$

$$\vec{AM} \begin{vmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{vmatrix} \begin{matrix} = -y - \frac{z}{2} \\ \Rightarrow \vec{AM} = y \vec{AB} + \frac{z}{2} \vec{AC} \end{matrix} \Rightarrow M \in P$$

Conclusion : $M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow x + y + \frac{z}{2} - 1 = 0$

On admettra que dans l'espace, les équations de la forme $ax + by + cz + d = 0$ (a, b, c, d sont des réels fixés et a, b, c ne sont pas tous les trois nuls) sont des équations de **plan P**

Ainsi : $M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$

3 – Barycentre

Soit n un entier naturel ($n > 1$). Soit une famille de n points $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n$ et une famille de n réels $\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n$

Soit M un point quelconque de l'espace. On s'intéresse au vecteur $\vec{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MA}_i$

CAS 1 : On suppose que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$

Propriété : dans ce cas, le vecteur ainsi défini \vec{u} est constant (ne dépend pas de M)

En effet, soit N un point de l'espace :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MA}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\vec{MN} + \vec{NA}_i) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \vec{MN} + \alpha_i \vec{NA}_i) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) \vec{MN} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{NA}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{NA}_i$$

CAS 2 : On suppose que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$

Propriété et définition : dans ce cas, le vecteur ainsi défini \vec{u} s'annule en un unique point G

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA}_i = \alpha_1 \vec{GA}_1 + \dots + \alpha_n \vec{GA}_n = \vec{0}$$

G est appelé barycentre des points pondérés $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$

G est appelé isobarycentre lorsque tous les coefficients sont égaux. On parle dans ce cas, de milieu pour $n = 2$ et de centre de gravité lorsque $n = 3$

On se place désormais dans le cas : $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$

Remarques :

- On ne change pas le barycentre G en multipliant tous les coefficients par un même nombre réel non nul

- Pour tout point M de l'espace : $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MA}_i = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) \vec{MG}$

- En particulier pour l'origine O : $\vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OA}_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$. Les coordonnées de G sont alors les

"moyennes pondérées des coordonnées des A_i "

Exemples :

- $n = 2$

Soit G l'isobarycentre de A et B. On a : $\vec{GA} + \vec{GB} = \vec{0} \Rightarrow \vec{GA} + \vec{GA} + \vec{AB} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AG} = \frac{1}{2} \vec{AB}$. C'est bien le milieu de A et B

- $n = 3$

Soit G l'isobarycentre de A, B et C trois points non alignés. On a : $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

On note A' le milieu de B et C , B' le milieu de A et C , C' le milieu de A et B. On obtient :

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Rightarrow \vec{GA} + 2\vec{GA}' = \vec{0} \Rightarrow 3\vec{GA} + 2\vec{AA}' = \vec{0} \Rightarrow \vec{AG} = \frac{2}{3} \vec{AA}' \text{ et de façon analogue}$$

$$\vec{BG} = \frac{2}{3} \vec{BB}' \text{ et } \vec{CG} = \frac{2}{3} \vec{CC}'$$

Ces trois relations vectorielles confirment que G est à l'intersection des trois médianes et se situe "au deux tiers" de la médiane en partant d'un sommet

Théorème : Soit A et B deux points distincts de l'espace. La droite (AB) est l'ensemble des barycentres de A et B

En effet :

$M \in (AB) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \vec{AM} = k \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{MA} + k \vec{AM} + k \vec{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow (1-k) \vec{MA} + k \vec{MB} = \vec{0}, (1-k) + k = 1 \neq 0$. M est barycentre de (A , 1 - k) et (B , k)

Réciproquement : si M est barycentre de A et B

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} (\alpha + \beta \neq 0), \alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AM} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB} \quad . \text{ M appartient à la droite (AB)}$$

Théorème : Soit A et B deux points distincts de l'espace. Le segment [AB] est l'ensemble des barycentres de A et B pondérés de coefficients de même signe

En effet :

$M \in [AB] \Leftrightarrow \exists k \in [0; 1], \vec{AM} = k \vec{AB} \Leftrightarrow (1-k) \vec{MA} + k \vec{MB} = \vec{0}, (1-k) + k = 1 \neq 0 \text{ et } 1-k \geq 0, k \geq 0$. Les coefficients sont de même signe

Réciproquement : si M est barycentre de (A, α) et (B, β) pondérés de coefficients de même signe.

D'après le théorème précédent $\vec{AM} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB}$ et $0 \leq \frac{\beta}{\alpha + \beta} \leq 1$. M appartient à [AB]

Théorème : Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace. Le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres de A, B et C

En effet :

$M \in (ABC) \Leftrightarrow \exists s, t \in \mathbb{R}, \vec{AM} = s \vec{AB} + t \vec{AC}$
 $\Leftrightarrow (1-s-t) \vec{MA} + s \vec{MB} + t \vec{MC} = \vec{0}, (1-s-t) + s + t = 1 \neq 0$. M est barycentre de (A, 1 - s - t), (B, s) et (C, t)

Réciproque : raisonnement identique au théorème précédent

Théorème : Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace. L'intérieur du triangle ABC, côtés compris, est l'ensemble des barycentres de A, B et C pondérés de coefficients de même signe

En effet :

Soit M un point du plan (ABC). M est barycentre de A, B et C : $\exists a, b, c \in \mathbb{R}, a \vec{MA} + b \vec{MB} + c \vec{MC} = \vec{0}$

On note N le barycentre de (A, a) et (B, b) ,

On obtient : $(a+b) \vec{MN} + c \vec{MC} = \vec{0}$

N est à l'intersection des droites (CM) et (AB).

Si a, b et c sont de même signe : N appartient à [AB] et M appartient à [CN]. M appartient alors à l'intérieur du triangle ABC, côtés compris

Réciproquement : Si M est à l'intérieur de ABC, côtés compris, a et b sont de même signe et a + b et c sont de même signe. On en déduit que a, b et c sont de même signe

II – Produit scalaire en 3D

1 – Définitions

Définition : Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs. On définit le produit scalaire de ces deux vecteurs noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Propriété : On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On pose $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y' + z z'$$

En effet :

par définition $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [(x+x')^2 + (y+y')^2 + (z+z')^2 - x^2 - y^2 - z^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2] = x x' + y y' + z z'$$

Propriétés : Soit \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs et k un réel.

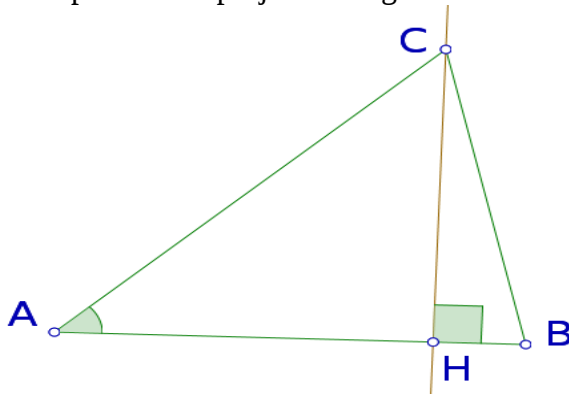
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Ces propriétés peuvent se démontrer en exploitant l'expression analytique du produit scalaire. On en déduit les propriétés suivantes

Propriétés : Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs.

- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Remarque : Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls. Soit A, B et C trois points de l'espace tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$. Plaçons nous dans le plan (ABC) ou dans un plan contenant ces points s'ils sont alignés. Le point H représente le projeté orthogonal de C sur la droite AB. Voir la figure ci-dessous



Rappelons le théorème généralisé de Pythagore ou le théorème de Al-Kashi

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos(\alpha), \alpha = \widehat{BAC} \text{ (angle géométrique de } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{)}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} (\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - \|\vec{AB} - \vec{AC}\|^2) = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2) = AB \times AC \cos(\alpha)$$

On en déduit les propriétés suivantes :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\alpha)$
- le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est nul lorsque l'angle géométrique de \vec{u} et \vec{v} est un angle droit

$$\text{De plus : } \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot (\vec{AH} + \vec{HC}) = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = \begin{cases} -AB \times AH \text{ si } A \in [HB] \\ AB \times AH \text{ sinon} \end{cases}$$

Quelques applications :

A1 : calcul d'angle dans l'espace

On se donne trois points A(1; 0; 0) B(2; 2; 2) et C(0; 2; 2). On recherche au degré près une mesure de l'angle géométrique $a = \widehat{BAC}$

$$\text{On utilise la formule } \cos(a) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\|}$$

$$\vec{AB} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}, \vec{AC} \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}, \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 7, AB = AC = 3 \Rightarrow \cos(a) = \frac{7}{9} \Rightarrow a = \arccos\left(\frac{7}{9}\right) \approx 39^\circ$$

A2 : Equation de plan

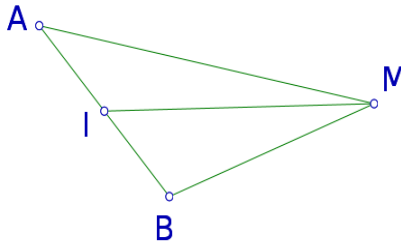
On se donne trois points A(3; 0; 0) B(2; 2; 2) et C(0; -1; 2). On recherche l'ensemble des points M(x; y; z) vérifiant $\vec{CM} \cdot \vec{AB} = 0$

$$\vec{AB} \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}, \vec{CM} \begin{vmatrix} x \\ y+1 \\ z-2 \end{vmatrix}, \vec{CM} \cdot \vec{AB} = -x + 2(y+1) + 2(z-2) = 0 \Rightarrow -x + 2y + 2z - 2 = 0$$

L'équation obtenue est celle d'un plan contenant C. On verra qu'un vecteur dit normal à ce plan est \vec{AB}

A3 : relations dans un triangle

Soit A, B, M trois points non alignés de l'espace. On note I le milieu de [AB]



Montrons les relations suivantes :

- $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2} AB^2$

En effet : $MA^2 + MB^2 = (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 = 2MI^2 + 2\vec{MI}(\vec{IA} + \vec{IB}) + IA^2 + IB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2} AB^2$

- $MA^2 - MB^2 = 2\vec{MI} \cdot \vec{BA}$

En effet : $MA^2 - MB^2 = (\vec{MI} + \vec{IA})^2 - (\vec{MI} + \vec{IB})^2 = 2\vec{MI}(\vec{IA} - \vec{IB}) + IA^2 - IB^2 = 2\vec{MI} \cdot \vec{BA}$

- $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - \frac{1}{4} AB^2$

En effet : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} + \vec{IB}) = (\vec{MI} - \frac{1}{2}\vec{AB}) \cdot (\vec{MI} + \frac{1}{2}\vec{AB}) = MI^2 - \frac{1}{4} AB^2$

Application : on recherche les points M de l'espace vérifiant $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$

On obtient : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - \frac{1}{4} AB^2 = 0 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{4} AB^2 \Leftrightarrow MI = \frac{1}{2} AB$

L'ensemble recherché est la sphère de diamètre [AB]

2 – Orthogonalité dans l'espace

Définition : vecteurs orthogonaux

Soit deux vecteurs de l'espace, \vec{u} et \vec{v} . On dit que ces vecteurs sont orthogonaux, lorsque l'un des deux est nul ou l'angle géométrique de ces vecteurs est l'angle droit

Propriété : Soit deux vecteurs de l'espace, \vec{u} et \vec{v} . Ils sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Exemple : On se donne deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} et on cherche à quelle condition ils sont orthogonaux.

$$\vec{u} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}, \vec{v} \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ z \end{vmatrix}, \vec{u} \cdot \vec{v} = -1 + 2z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}$$

Définition : droites orthogonales

Soit deux droites de l'espace D et D' de vecteurs directeurs respectifs \vec{u} et \vec{u}' . On dit que ces droites sont orthogonales, lorsque les vecteurs directeurs sont orthogonaux, $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$

Remarque : deux droites orthogonales dans l'espace, ne sont pas nécessairement sécantes. Lorsqu'elles le sont, ils sont alors coplanaires, on dit qu'elles sont perpendiculaires

Définition : projeté orthogonal d'un point sur un plan

Soit P un plan de l'espace et M un point de l'espace. On définit la droite perpendiculaire à P passant par M. L'intersection M' de cette droite et du plan P est le projeté orthogonal de M sur P. $M = M'$ lorsque M appartient à P

Définition : vecteur normal à un plan

On dit que le vecteur non nul \vec{n} est un vecteur normal à un plan P, si toute droite de vecteur directeur \vec{n} est perpendiculaire à P

Remarque : une droite perpendiculaire à un plan P, est orthogonale à toute droite de P

Propriété : Soit \vec{n} un vecteur non nul de l'espace et P un plan ayant pour vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v} . \vec{n} est un vecteur normal à un plan P, si et seulement si \vec{n} est orthogonal à \vec{u} et \vec{v}

En effet : si \vec{n} est un vecteur normal à P, toute droite de vecteur directeur \vec{n} est orthogonale à toute droite de P et en particulier celles de vecteur directeur \vec{u} et \vec{v} . On en déduit $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$

Réciproquement : On suppose $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$. Soit D une droite de P de vecteur directeur \vec{w} . Ce vecteur est une combinaison linéaire de \vec{u} et \vec{v} . $\vec{w} = s\vec{u} + t\vec{v}, s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$

On a : $\vec{n} \cdot \vec{w} = s\vec{n} \cdot \vec{u} + t\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$. Ainsi, toute droite de vecteur directeur \vec{n} est perpendiculaire à P. \vec{n} est un vecteur normal à P

Définition : plans perpendiculaires

P et P' sont deux plans perpendiculaires si l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre

Propriété : Soit P et P' deux plans de vecteurs normaux respectifs \vec{n} et \vec{n}' . Ils sont perpendiculaires si et seulement si : $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$

Quelques applications :

A1 : Recherche de vecteur normal

soit P un plan de vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}, \vec{v} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$. Recherchons un vecteur normal $\vec{n} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ à P. Il suffit

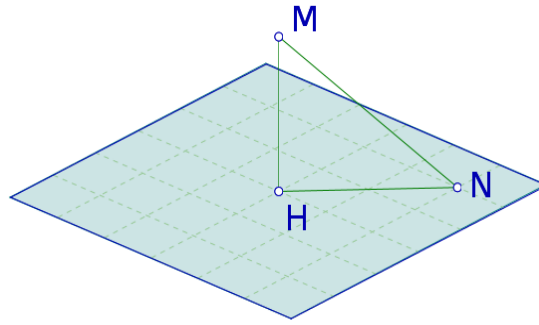
d'imposer $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow x + 2z = 0$ et $-x + y = 0 \Leftrightarrow x = -2z$ et $y = x$

On pose $z = 1$, ce qui donne $\vec{n} \begin{vmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}$

A2 : Distance d'un point à un plan

Soit M un point de l'espace et P un plan. Soit N un point quelconque de P. On note H le projeté orthogonal de M sur P. Appliquons le théorème de Pythagore au triangle MHN

$$MN^2 = MH^2 + HN^2 \Rightarrow MN \geq MH$$



On note $MH = d(M, P)$, distance de M au plan P. Exprimons MH.

Soit \vec{n} un vecteur normal à P : $\vec{MN} \cdot \vec{n} = (\vec{MH} + \vec{HN}) \cdot \vec{n} = \vec{MH} \cdot \vec{n} \Rightarrow |\vec{MN} \cdot \vec{n}| = |\vec{MH} \cdot \vec{n}| = MH \|\vec{n}\|$

On en déduit : $MH = \frac{|\vec{MN} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

III – Représentation des droites et des plans

1 – Les plans

a – Le plan est défini par un point et deux vecteurs directeurs

Soit P un plan de l'espace, A un point de P et $\vec{u} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$, $\vec{u}' \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{vmatrix}$ deux vecteurs directeurs. Soit $M(x ; y ; z)$ un

point de P, exprimons que les vecteurs $\vec{AM}, \vec{u}, \vec{u}'$ sont colinéaires

$M \in P \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} / \vec{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{u}'$. Ce qui donne une représentation paramétrique de P

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha a + \beta a' \\ y = y_A + \alpha b + \beta b' \\ z = z_A + \alpha c + \beta c' \end{cases}$$

b – Le plan est défini par un point et un vecteur normal

Soit P un plan de l'espace, A un point de P et $\vec{n} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ un vecteur normal. Soit $M(x ; y ; z)$ un point de P

$M \in P \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Ce qui donne une équation cartésienne de P

$$M(x ; y ; z) \in P \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz = ax_A + by_A + cz_A$$

2 – Les droites

La droite est définie par un point et un vecteur directeur

Soit D une droite de l'espace, A un point de D et $\vec{u} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ un vecteur directeur de D. Soit $M(x ; y ; z)$ un

point de D, exprimons que les vecteurs \vec{AM}, \vec{u} sont colinéaires

$M \in D \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \vec{AM} = t \vec{u}$. Ce qui donne une représentation paramétrique de D

$$\begin{cases} x = x_A + t a \\ y = y_A + t b \\ z = z_A + t c \end{cases}$$

3 – Exercices classiques

- Représentation paramétrique d'une droite

Soit A(1 ; 0 ; 4) et B(- 2 ; 1 ; 0). On recherche une représentation paramétrique de la droite (AB)

$$\overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{vmatrix} . M \in D \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB} \text{ ce qui donne } \begin{cases} x=1-3t \\ y=0+t \\ z=4-4t \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

- Représentation paramétrique d'une demi-droite

Soit A(1 ; 0 ; 4) et B(- 2 ; 1 ; 0). On recherche une représentation paramétrique de la demi-droite [AB] de sommet A et contenant B

$$\overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{vmatrix} . \text{ Ce qui donne } \begin{cases} x=1-3t \\ y=0+t \\ z=4-4t \end{cases} t \geq 0$$

- Représentation paramétrique d'un segment

Soit A(1 ; 0 ; 4) et B(- 2 ; 1 ; 0). On recherche une représentation paramétrique du segment [AB]

$$\overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{vmatrix} . \text{ Ce qui donne } \begin{cases} x=1-3t \\ y=0+t \\ z=4-4t \end{cases} t \in [0; 1]$$

- Equation cartésienne d'un plan

On recherche une équation cartésienne du plan P passant par A(- 1 ; 5 ; 0) et de vecteur normal $\vec{n} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$

$$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \quad . \quad \overrightarrow{AM} \begin{vmatrix} x+1 \\ y-5 \\ z \end{vmatrix} \text{ Ce qui donne : } x + 2y + 3z = 9$$

- Equation cartésienne d'un plan

Soit A(1 ; 2 ; 3) , B(0 ; 1 ; 0) et C(-1 ; 0 ; 0) trois points de l'espace. On recherche une équation cartésienne du plan P passant par ces points

Méthode 1 :

Equation générale de P : $ax + by + cz + d = 0$

On exprime que A, B et C appartiennent à P. D'où le système $\begin{cases} a+2b+3c+d=0 \\ b+d=0 \\ -a+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ b=-d \\ a=d \end{cases}$

Une solution est : $x - y + 1 = 0$

Méthode 2 :

On détermine d'abord un vecteur normal $\vec{n} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ à P à partir des vecteurs directeurs de P on utilise le

principe l'exercice précédent

$$\overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{vmatrix}, \overrightarrow{AC} \begin{vmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \text{ et } \overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3z=0 \\ 2x+2y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases} . \text{ On peut choisir } \vec{n} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

L'équation de P sera de la forme : $x - y + d = 0$; d à déterminer en exprimant que B appartient à P. Une

équation cartésienne de P est donc : $x - y + 1 = 0$

● Intersection de deux plans

Soit P et P' deux plans d'équations cartésiennes respectives $x + 2y + 1 = 0$ et $x + y + z - 1 = 0$. Déterminons l'intersection éventuelle de ces deux plans.

Un vecteur normal à P est $\vec{n} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$. Un vecteur normal à P' est $\vec{n}' \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$. Ces vecteurs normaux ne sont pas

colinéaires, le plan P et P' ne sont pas parallèles. L'intersection de P et P' est une droite D. Les points M(x ; y ; z) de D vérifient les deux équations cartésiennes. L'idée ici est d'exprimer deux inconnues en fonction de la troisième

$$\begin{cases} x+2y+1=0 \\ x+y+z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-2y \\ y=0+1y \\ z=2+1y \end{cases} . \text{ Une représentation paramétrique de D est : } \begin{cases} x=-1-2t \\ y=0+1t \\ z=2+1t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Une rapide vérification montre que les points ainsi définis appartiennent bien à P et P' (les coordonnées vérifient les deux équations cartésiennes)

Le point A(-1 ; 0 ; 2) appartient à D et $\vec{u} \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ est un vecteur directeur de D

● Intersection d'une droite et d'un plan

Soit D la droite de l'espace passant par les points A(0 ; 0 ; 2) et B(1 ; -4 ; 5) et P le plan d'équation $x + 2z = 18$. Recherchons l'intersection éventuelle de D et P

$$\vec{AB} \begin{vmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{vmatrix} . \text{ Une représentation paramétrique de D est : } \begin{cases} x=0+1t \\ y=0-4t \\ z=2+3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} . \text{ Soit M(x ; y ; z) un point de}$$

D. On suppose que M est aussi dans P, ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de P :

$$x+2z=18 \Leftrightarrow (0+1t)+2(2+3t)=18 \Leftrightarrow t=2$$

Cette valeur particulière de t correspond au point C(2 ; -8 ; 8). L'intersection de D et P se réduit au point C

● Intersection de deux droites

Soit D la droite de l'espace passant par les points A(0 ; 0 ; 1) et B(1 ; 0 ; -1). Soit D' la droite de l'espace passant par les points A'(10 ; 20 ; 30) et B'(5 ; 4 ; 3). Recherchons l'intersection éventuelle de D et D'

$$\vec{AB} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{vmatrix} , \vec{A'B'} \begin{vmatrix} -5 \\ -16 \\ -27 \end{vmatrix}$$

Une représentation paramétrique de D est : $\begin{cases} x=0+1t \\ y=0+0t \\ z=1-2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Une représentation paramétrique de D' est : $\begin{cases} x=5-5s \\ y=4-16s \\ z=3-27s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$

Soit M(x ; y ; z) un point appartenant à D et à D'. On obtient le système $\begin{cases} x=5-5s=0+1t \\ y=4-16s=0+0t \\ z=3-27s=1-2t \end{cases}$

Attention !! on a un système de trois équations en t et s. Les deux premières permettent d'obtenir

$$s = \frac{1}{4}, t = \frac{15}{4} . \text{ En remplaçant t et s par leur valeur dans la troisième équation, on obtient } \frac{-15}{4} = \frac{-13}{2}$$

ce qui est impossible.

On en déduit : $D \cap D' = \emptyset$

• Détermination de $d(A, P)$. Intersection d'une sphère et d'un plan

Soit $A(1 ; 2 ; 3)$ un point de l'espace et P le plan d'équation $x + y + z = 1$. Déterminons la distance de A à P en appliquant la formule $d(A, P) = AH = \frac{|\vec{AN} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

La forme générale de l'équation cartésienne de P est $ax + by + cz + d = 0$.

H est le projeté orthogonal de A sur P , N est un point quelconque de P et $\vec{n} \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$ est un vecteur normal

à P . Ce qui donne $d(A, P) = \frac{|a(x_N - x_A) + b(y_N - y_A) + c(z_N - z_A)|}{\|\vec{n}\|}$

Voici une autre formulation de la distance au plan : $d(A, P) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

$$d(A, P) = \frac{|1+2+3-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Soit S la sphère de centre A et de rayon $r = 5$. Etudions l'intersection éventuelle de S et P .

Il suffit de comparer le rayon et la distance de A au plan P . On est dans le cas où $d(A, P) < r$, le plan P coupe la sphère S et l'intersection est un cercle

• Projeté orthogonal sur un plan

Reprenons l'exercice précédent sous un autre angle. Soit $A(1 ; 2 ; 3)$ un point de l'espace et P le plan d'équation cartésienne $x + y + z = 1$. Déterminons H , le projeté orthogonal de A sur le plan P (on peut remarquer d'emblée que A n'appartient pas à P)

Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P . On définit la droite D passant par A et de vecteur directeur

\vec{n} . Par construction le point d'intersection de D et P est le projeté orthogonal de A sur P

Une représentation paramétrique de D est : $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=3+t \end{cases} t \in \mathbb{R}$. Exprimons que H est dans D et P

$$(1+t) + (2+t) + (3+t) = 1 \Leftrightarrow t = \frac{-5}{3} \Rightarrow H\left(\frac{-2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$$

Vérification : $AH = \sqrt{\left(1 + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(3 - \frac{4}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \sqrt{25 + 25 + 25} = 5 \frac{\sqrt{3}}{3}$

On retrouve $AH = d(A, P)$

• Projeté orthogonal sur une droite

Soit D la droite de l'espace passant par les points $A(1 ; 0 ; 1)$ et $B(1 ; 2 ; 0)$. Soit le point $C(0 ; 0 ; 5)$. Déterminons H , le projeté orthogonal de C sur la droite (AB)

$\vec{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique de D est : $\begin{cases} x=1+0t=1 \\ y=0+2t=2t \\ z=1-1t=1-t \end{cases} t \in \mathbb{R}$

Méthode 1 : On recherche le plan P contenant C et perpendiculaire à (AB) . Une équation cartésienne de P est $0x + 2y - z + d = 0$ où d est un réel à déterminer. C appartient à P , il en résulte : $d = 5$.

$P : 2y - z + 5 = 0$

On recherche le point appartenant à D et à P . Ce point est le projeté orthogonal de C sur (AB)

$$2(2t) - (1-t) + 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{-4}{5} \Rightarrow H\left(1; \frac{-8}{5}; \frac{9}{5}\right)$$

Méthode 2 : Soit M un point quelconque de D . Appliquons le théorème de Pythagore au triangle CHM

rectangle en H : $CM^2 = CH^2 + HM^2$. On en déduit $CM \geq CH$. CH représente le minimum de CM

On pose $f(t) = CM^2 = 1 + 4t^2 + (-t-4)^2 = 5t^2 + 8t + 17$

$$f'(t) = 10t + 8$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-4}{5}$$

$f(t)$ est un polynôme de degré 2 convexe (courbe orientée vers le haut). On sait que f admet un minimum absolu en $t = \frac{-4}{5}$ en on retrouve le même point H

• Droite perpendiculaire à deux autres droites

Soit D et D' deux droites.

Une représentation paramétrique de D est :
$$\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=1-2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Une représentation paramétrique de D' est :
$$\begin{cases} x=1-s \\ y=4+s \\ z=3 \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

Question : existe t-il une droite D'' perpendiculaires à D et D' ?

$\vec{u} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{vmatrix}$ est un vecteur directeur de D, $\vec{u}' \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ est un vecteur directeur de D'

L'idée est de rechercher un point A de D et A' de D' tels que $\overrightarrow{AA'} \begin{vmatrix} 1-s-t \\ 4+s \\ 2+2t \end{vmatrix}$ soit orthogonal aux vecteurs

directeurs de D et D'. On obtient le système
$$\begin{cases} 1(1-s-t) - 2(2+2t) = 0 \\ -(1-s-t) + (4+s) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-1}{3} \\ s = \frac{-4}{3} \end{cases}$$

$$D'' = (AA') \text{ et } A\left(\frac{-1}{3}; 0; \frac{5}{3}\right), A'\left(\frac{7}{3}; \frac{8}{3}; 3\right)$$

Remarque : AA' représente la plus petite distance entre un point de D et un point de D', elle est notée distance de D et D'

• Demi-espaces

Soit A un point de l'espace et \vec{n} un vecteur non nul de l'espace.

Question : que représente le lieu des points M vérifiant : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} > 0$?

Soit P le plan passant par A et de vecteur normal \vec{n} : $M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

Le plan P partage l'espace en deux demi-espaces et dans le plan P le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$ est nul

Soit \vec{u}, \vec{v} deux vecteur directeurs de P. Exprimons \overrightarrow{AM} dans la base adaptée $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$

Il existe a, b et c trois réels tels que $\overrightarrow{AM} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{n}$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} > 0 \Leftrightarrow (a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{n}) \cdot \vec{n} > 0 \Leftrightarrow a\vec{u} \cdot \vec{n} + b\vec{v} \cdot \vec{n} + c\vec{n} \cdot \vec{n} > 0 \Leftrightarrow c\|\vec{n}\|^2 > 0 \Leftrightarrow c > 0$$

M se situe ainsi d'un même côté du plan P

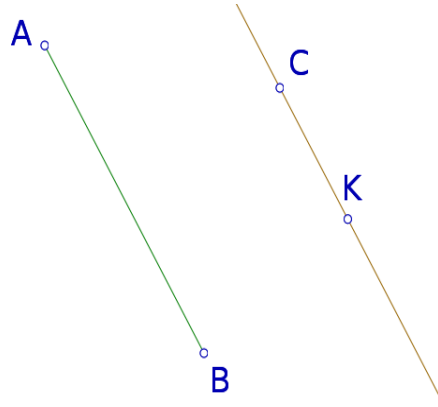
Interprétation : Sur chaque demi-espace délimité par P, le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$ garde un signe constant. L'ensemble recherché est donc l'un des deux demi-espaces

• Lieu de points

Soit A, B et C trois points non alignés. Soit k un réel, on recherche les points M de l'espace vérifiant

$$\vec{CM} \cdot \vec{AB} = k$$

On se place dans le plan (ABC) et on considère la droite parallèle à AB et passant par C. Soit K le point de cette droite telle que $\vec{CK} = \frac{k}{AB^2} \vec{AB}$



On a : $\vec{CK} \cdot \vec{AB} = \frac{k}{AB^2} \vec{AB} \cdot \vec{AB} = k$

Ce qui donne : $\vec{CM} \cdot \vec{AB} = k \Leftrightarrow \vec{CM} \cdot \vec{AB} = \vec{CK} \cdot \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{KM} \cdot \vec{AB} = 0$

L'ensemble recherché est un plan passant par K et de vecteur normal \vec{AB}