

Document avec corrigé : oui

**Exercice 100 :**

On considère une fonction  $f$ , continue sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ . On définit la suite  $u$  de la façon suivante.

$n$  est un entier strictement positif : 
$$u_n = (n+1) \int_0^1 x^n f(x) dx$$

Montrer que 
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = f(1)$$

SOLUTION :

Rappel 1 :

$f$  est continue sur un intervalle fermé et borné  $[a ; b]$ , alors :

- $f$  est uniformément continue
- $f$  est bornée
- $f$  atteint ses bornes

Rappel 2 : définition de la limite finie  $L$  d'une suite  $u$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |u_n - L| < \varepsilon$$

Rappel 3 : continuité de la fonction  $f$  en  $a$

On se place sur un intervalle  $I$  sur lequel  $f$  est définie et  $a$  appartient à  $I$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I : |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Démonstration : On pose  $I = [0 ; 1]$ . Soit  $\varepsilon > 0$

On note :  $M = \sup_{x \in I} |f(x)|$

\*\* Exprimons la continuité de  $f$  en 1 :

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in I : |x - 1| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(1)| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ ce qui donne comme encadrement pour } x : ]1 - \alpha ; 1[. \text{ On peut}$$

supposer que  $0 < 1 - \alpha$

\*\* On remarque que  $f(1)$  peut s'écrire : 
$$f(1) = (n+1) \int_0^1 x^n f(1) dx$$

\*\* Ecrivons maintenant  $u_n - f(1)$

$$u_n - f(1) = (n+1) \int_0^1 x^n (f(x) - f(1)) dx = (n+1) \int_0^{1-\alpha} x^n (f(x) - f(1)) dx + (n+1) \int_{1-\alpha}^1 x^n (f(x) - f(1)) dx$$

Dans la première intégrale, on majore  $|f(x) - f(1)|$  par  $2M$

Dans la deuxième intégrale, on majore  $|f(x) - f(1)|$  par  $\varepsilon/4$

On obtient : 
$$|u_n - f(1)| \leq 2(1-\alpha)^{n+1} M + (1 - (1-\alpha)^{n+1}) \frac{\varepsilon}{4}$$

Soit : 
$$|u_n - f(1)| < 2(1-\alpha)^{n+1} M + \frac{\varepsilon}{2}$$

Exprimons que : 
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2(1-\alpha)^{n+1} M = 0$$

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow 2(1-\alpha)^{n+1} M < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ce qui donne : } \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |u_n - f(1)| < \varepsilon$$

Conclusion :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = f(1)$$

**Exercice 200 : (HEC 2008)**

On définit la suite  $u$  :

$$u_0 \in [0; 1] \text{ et } u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$$

1 – Soit la propriété  $P(n) : 1 \leq u_n \leq 2$

Montrer par récurrence que  $P(n)$  est vraie pour  $n \geq 1$

2 – En déduire la limite de  $u$  en  $+\infty$

3 – Déterminer un développement limité en  $+\infty$  de la forme  $u_n = 1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{1}{n^2} \epsilon\left(\frac{1}{n}\right)$  où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

SOLUTION :

1 - Etape 1 :  $P(1)$  est vraie, en effet :  $u_1 = 1 + \frac{u_0}{0+1} = 1 + u_0$

Etape 2 : on suppose que  $P(n)$  est vraie, montrons que  $P(n+1)$  est vraie

$$u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1} \Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 1 + \frac{2}{n+1} \leq 2$$

$P(n+1)$  est donc vraie

Conclusion :  $P(n)$  est vraie pour  $n \geq 1$

2 – On en déduit pour  $n > 1$  :  $u_n = 1 + \frac{u_{n-1}}{n} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{n}$

Ainsi :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

3 – On en déduit pour  $n > 2$  :  $u_n = 1 + \frac{u_{n-1}}{n} = 1 + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{u_{n-2}}{n-1}\right) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} \left(1 + \frac{u_{n-3}}{n-2}\right)$

Ce qui donne :  $u_n = 1 + \frac{1}{n-1} + \frac{u_{n-3}}{n(n-1)(n-2)} = 1 + \frac{1}{n(1-\frac{1}{n})} + \frac{u_{n-3}}{n(n-1)(n-2)}$

Faisons un développement limité de cette expression

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \epsilon_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{u_{n-3}}{n(n-1)(n-2)} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \left(\epsilon_1\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n^2 u_{n-3}}{n(n-1)(n-2)}\right)$$

où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_1\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

on pose :  $\epsilon\left(\frac{1}{n}\right) = \epsilon_1\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n^2 u_{n-3}}{n(n-1)(n-2)}$

$u$  a pour limite 0 en  $+\infty$

Conclusion :  $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \epsilon\left(\frac{1}{n}\right)$  où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

**Exercice 300 : (Concours général)**

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{N}$  telle que pour tout entier naturel  $n$  :  $f(n + 1) > f(f(n))$

- 1 – Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $k$ , la propriété  $P(k)$  suivante est vraie :  
 $\forall n > k, f(n) > k$
- 2 – En déduire que  $f$  est une fonction croissante
- 3 – En déduire que  $f(n) = n$  pour tout entier naturel  $n$

SOLUTION :

1 – Etape 1 : montrons que  $P(0)$  est vraie

Soit  $n > 0$ , on pose  $m = f(n - 1)$

Si  $f(n) = 0$ , alors  $0 > f(m)$  : IMPOSSIBLE

Etape 2 : On suppose que  $P(k)$  est vraie, montrons que  $P(k + 1)$  est vraie

Soit  $n > k + 1$ , bien entendu  $n - 1 > k$ , d'où  $f(n - 1) > k$ , puis  $f(n) > f(f(n - 1)) > k$

On a donc nécessairement  $f(n) > k + 1$

$P(k + 1)$  est donc vraie

Conclusion :  $P(k)$  est vraie pour  $k \geq 0$

2 – Soit  $n > 0$ ,  $n > n - 1$ , on en déduit  $f(n) > n - 1$ , soit  $f(n) \geq n$

De plus  $f(n + 1) > f(f(n)) \geq f(n)$ .  $f$  est donc croissante

3 – Soit  $n > 0$ , si  $f(n) > n$ , alors  $f(n) \geq n + 1$ , d'où  $f(f(n)) \geq f(n + 1)$  : IMPOSSIBLE

On en déduit  $f(n) \leq n$ , et donc  $f(n) = n$

pour  $n = 0$  :  $f(1) = 1 > f(f(0))$ , d'où  $f(f(0)) = 0$ , seule possibilité :  $f(0) = 0$

**Exercice 350 :**

1 – Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soit  $f$  une fonction continue et définie sur  $I$ . On suppose que (C1) :

$$\forall x \in I, \forall y \in I, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x)+f(y)) \quad . \text{ Montrer que } f \text{ est convexe sur } I$$

2 – Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  de classe  $C^2$ , vérifiant :  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x+y)f(x-y) \leq (f(x))^2$   
 Montrer que :  $\forall t \in \mathbb{R}, f''(t)f(t) \leq (f'(t))^2$

SOLUTION :

1 – Soit  $x$  et  $y$  de  $I$ . Soit la propriété  $P(n)$  :

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \leq 2^n, \alpha_{n,k} = \frac{k}{2^n} \Rightarrow f(\alpha_{n,k}x + (1-\alpha_{n,k})y) \leq \alpha_{n,k}f(x) + (1-\alpha_{n,k})f(y)$$

\*\* Montrons par récurrence que  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n > 0$

Etape 1 :  $P(1)$  est vraie, cela découle de la propriété (C1)

Etape 2 : On suppose que  $P(n)$  est vraie, montrons que  $P(n+1)$  est vraie.  $k \in \mathbb{N}, k \leq 2^{n+1}, \alpha_{n+1,k} = \frac{k}{2^{n+1}}$

Si  $k$  est pair,  $k = 2p, \alpha_{n+1,k} = \frac{p}{2^n} = \alpha_{n,p}$  et  $P(n+1)$  est vérifiée

Si  $k$  est impair ( $k = 2p + 1$ ), on applique (C1) dans le cas suivant :

$$u = \alpha_{n,p}x + (1-\alpha_{n,p})y, v = \alpha_{n,p+1}x + (1-\alpha_{n,p+1})y, f\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(u)+f(v))$$

$$\frac{u+v}{2} = \alpha_{n+1,k}x + (1-\alpha_{n+1,k})y \quad \text{et on applique à } f(u) \text{ et } f(v) \text{ la relation } P(n). \text{ Ce qui donne :}$$

$$f(\alpha_{n+1,k}x + (1-\alpha_{n+1,k})y) \leq \frac{1}{2}(\alpha_{n,p}f(x) + (1-\alpha_{n,p})f(y) + \alpha_{n,p+1}f(x) + (1-\alpha_{n,p+1})f(y))$$

$$\Rightarrow f(\alpha_{n+1,k}x + (1-\alpha_{n+1,k})y) \leq \alpha_{n+1,k}f(x) + (1-\alpha_{n+1,k})f(y) \quad . P(n+1) \text{ est vérifiée}$$

Conclusion :  $P(n)$  est vraie pour  $n > 0$

\*\* Rappel :  $f$  est convexe sur  $I$  si (R) :  $\forall x \in I, \forall y \in I, \forall t \in [0; 1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$

Soit  $x$  et  $y$  de  $I$ . La relation (R) est vérifiée pour tous les  $\alpha_{n,k}$  qui forment un ensemble **dense** dans  $[0; 1]$ .  $f$  étant continue, la relation reste vraie pour tout  $t$  de  $[0; 1]$ .  $f$  est donc convexe sur  $I$

2 – Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  de classe  $C^2$ , vérifiant :  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x+y)f(x-y) \leq (f(x))^2$

En posant  $u = x + y$  et  $v = x - y$  la relation devient (F) :  $\forall u \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}, f(u)f(v) \leq \left(f\left(\frac{u+v}{2}\right)\right)^2$

On suppose que  $f$  n'est pas la fonction nulle. Soit  $t$  un réel tel que  $f(t) \neq 0$

Dans la mesure où  $-f$  vérifie aussi la même relation que  $f$ , on peut supposer que  $f(t) > 0$ .  $f$  étant continue, il existe un intervalle ouvert  $I$  contenant  $t$  sur lequel  $f$  reste strictement positive. Sur  $I$ ,  $f$  vérifie (F).

Soit  $g$  la fonction définie sur  $I$  par :  $g(x) = \ln(f(x))$

$$g \text{ est de classe } C^2 \text{ et } g \text{ vérifie : } \forall u \in I, \forall v \in I, g\left(\frac{u+v}{2}\right) \geq \frac{1}{2}(g(u)+g(v))$$

En appliquant le même raisonnement que dans la question 1, cela suffit pour affirmer que  $g$  est concave sur  $I$ . On sait alors que dans ce cas,  $g''$  est négative.

$$g(x) = \ln(f(x)) \Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow g''(x) = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2}$$

Conclusion :  $f''(t)f(t) \leq (f'(t))^2$

**Exercice 400 : (HEC 2007)**

Soit  $p$  une probabilité définie sur un univers  $E$ . Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois événements de  $E$  vérifiant les propriétés suivantes :

$$P(A) = p(B) = p(C) = q$$

$$p(A \cap B \cap C) = 0$$

1 – Montrer que  $q \leq \frac{2}{3}$

2 – On suppose dans cette question que  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont indépendants deux à deux. Montrer que  $q \leq \frac{1}{2}$

SOLUTION :

$$1 - \text{Rappel : } p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - (p(A \cap B) + p(B \cap C) + p(A \cap C)) + p(A \cap B \cap C)$$

d'après les hypothèses, les ensembles  $A \cap B$ ,  $B \cap C$  et  $A \cap C$  sont deux à deux disjoints, on en déduit :

$$p((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)) = (p(A \cap B) + p(B \cap C) + p(A \cap C))$$

$$\text{d'où la relation : } p(A \cup B \cup C) + p((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)) = 3q$$

chaque probabilité étant inférieure à 1, obtient :  $q \leq \frac{2}{3}$

2 – les nouvelles hypothèses se traduisent de la façon suivante :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B); p(B \cap C) = p(B) \times p(C); p(A \cap C) = p(A) \times p(C)$$

$$\text{la relation de la question précédente devient : } p(A \cup B \cup C) = 3q - 3q^2 = 3(q - q^2)$$

Une étude de la fonction  $f(q) = q - q^2$  sur  $[0 ; 1]$  met en évidence un maximum en  $\frac{1}{2}$ , égal à  $\frac{1}{4}$

$$\text{d'où : } p(A \cup B \cup C) \leq \frac{3}{4}$$

$$\text{d'après la première question : } p((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)) = p(A \cap B) + p(B \cap C) + p(A \cap C) = 3q^2$$

$$\text{or : } (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C) \subset A \cup B \cup C \Rightarrow p((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)) \leq p(A \cup B \cup C)$$

$$\text{ce qui donne : } 3q^2 \leq \frac{3}{4} \Rightarrow q \leq \frac{1}{2}$$

**Exercice 500 : (HEC 2007)**

Pour tout entier naturel  $n$ , on définit la fonction réelle :  $f_n(x) = x^5 + nx - 1$

1 – Montrer que pour tout  $n$ , il existe un unique réel  $u_n$  vérifiant  $f_n(u_n) = 0$   
On définit ainsi une suite  $u$  que l'on se propose d'étudier

2 – Déterminer la limite éventuelle de  $u$ , ainsi qu'un équivalent de  $u_n$

3 – Pour  $n > 0$ , on définit la suite  $a$  :  $u_n = \frac{1}{n} - a_n$ . Déterminer un équivalent de  $a_n$

SOLUTION :

$f_n$  est une fonction continue et dérivable, de dérivée  $f_n'(x) = 5x^4 + n \geq 0$  (s'annule ponctuellement en 0 pour  $n = 0$ )

Appliquons le théorème des valeurs intermédiaires :

$f_n$  est continue

$f_n$  est strictement croissante

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n = +\infty$$

Il existe bien un unique réel  $u_n$  vérifiant  $f_n(u_n) = 0$

2 – Remarque :  $f_n(0) = -1$

on en déduit :  $u_n > 0$

$u_n$  vérifie la relation  $(R_n)$  :  $u_n^5 + nu_n = 1 \Rightarrow nu_n < 1 \Rightarrow 0 < u_n < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

En  $+\infty$ , la relation  $(R_n)$  indique qu'un équivalent de  $u_n$  est  $\frac{1}{n}$

3 – d'après la définition de  $a$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

$$\text{on a : } na_n = 1 - nu_n = u_n^5 \Rightarrow a_n = \frac{u_n^5}{n} = \frac{(nu_n)^5}{n^6}$$

en  $+\infty$ , un équivalent de  $a_n$  est  $\frac{1}{n^6}$

**Exercice 600 :**

Soit  $f$  une fonction réelle positive, définie et intégrable sur un intervalle fermé et borné  $[a ; b]$  ( $a < b$ ) telle que :

$$\int_a^b f(x) dx = 0$$

1 – Dans cette question uniquement, on suppose que  $f$  est continue. Montrer que  $f$  est nulle sur  $[a ; b]$

2 – On note  $D = \{x \text{ de } [a ; b], \text{ tels que } f(x) = 0\}$ . Montrer que  $D$  est dense dans  $[a ; b]$

SOLUTION :

Remarque initiale : soit  $u$  et  $v$  deux réels ( $u \leq v$ ) de  $[a ; b]$ , alors  $0 \leq \int_u^v f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx = 0 \Rightarrow \int_u^v f(x) dx = 0$

1 – on suppose qu'il existe  $c$  de  $[a ; b]$  tel que  $f(c) > 0$

**IDEE :** montrons que  $f$  est alors strictement positive sur un intervalle contenant  $c$ , en utilisant la continuité de  $f$  en  $c$

$$\text{Soit } \varepsilon = \frac{f(c)}{2}, \exists \alpha > 0, \forall x \in [a ; b] : |x - c| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

Ainsi : si  $x \in [a ; b]$  et  $c - \alpha < x < c + \alpha \Rightarrow \frac{f(c)}{2} < f(x)$ . On pose  $u = c - \alpha, v = c + \alpha$

Sans restreindre l'étude, on suppose que  $u$  et  $v$  appartiennent à  $[a ; b]$ . On obtient :

$$\int_u^v f(x) dx \geq \int_u^v \frac{f(c)}{2} dx = \alpha f(c) > 0 \quad : \text{IMPOSSIBLE. } f \text{ est donc nulle sur } [a ; b]$$

2 – Soit  $u$  et  $v$  deux réels quelconques ( $u \leq v$ ) de  $[a ; b]$ , montrons qu'il existe un réel  $c$  appartenant à  $[u ; v]$  tel que  $f(c) = 0$ . Appliquons pour cela la définition de l'intégrabilité de  $f$ . On note  $E$  l'ensemble des fonction en escalier sur  $[a ; b]$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists g \in E, \exists h \in E, g \leq f \leq h \text{ et } \int_u^v (h - g) \leq \varepsilon \quad (R1)$$

Rappel : Soit  $z$  de  $E$ , il existe une subdivision  $\sigma$  de  $[u ; v]$  telle que :

$$\sigma = (a_0 = u, a_1, a_2, \dots, a_n = v), \forall x \in ]a_{i-1}, a_i[ \quad z(x) = \lambda_i = \text{CONSTANTE et } \int_u^v z(x) dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_{i-1})$$

Soit  $\varepsilon$  donné.

\*\* Concernant  $g$ , si l'une des constantes d'indice  $m$  est strictement positive, on aurait :

$$\int_u^v f(x) dx \geq \int_{a_{m-1}}^{a_m} \lambda_m dx \geq \lambda_m (a_m - a_{m-1}) > 0 \quad : \text{IMPOSSIBLE. (R1) devient : } \forall \varepsilon > 0, \exists h \in E, f \leq h \text{ et } \int_u^v h \leq \varepsilon$$

\*\* Concernant  $h$ , si toutes les constantes sont strictement supérieurs à  $\frac{\varepsilon}{v-u}$ , on aurait ;

$$\int_u^v g(x) dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_{i-1}) > \frac{\varepsilon}{v-u} \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) = \varepsilon \quad : \text{IMPOSSIBLE. Il existe donc un indice et donc un}$$

intervalle sur lequel  $g(x) \leq \frac{\varepsilon}{v-u}$ . On construit ainsi un intervalle inclus dans  $[u, v]$  sur lequel :  $f(x) \leq g(x) \leq$

$$\frac{\varepsilon}{v-u}$$

**IDEE :** A l'aide de cette dernière remarque, on construit une série d'intervalles emboîtés à partir de  $[u ; v]$  vérifiant :

$$[u_0 ; v_0] = [u ; v]$$

## Exercices de classe préparatoire

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ et } n > 0, [u_n; v_n] \subset [u_{n-1}; v_{n-1}], \forall x \in [u_n; v_n], f(x) \leq \frac{1}{n}$$

Version courte :

Application du théorème des segments emboîtés : il existe des réels appartenant à tous les intervalles ainsi créés

Version longue :

la suite ainsi créée  $(u_n)$  est croissante et majorée ( $u_n \leq v_0$ )

la suite ainsi créée  $(v_n)$  est décroissante et minorée ( $u_0 \leq v_n$ )

$(u_n)$  et  $(v_n)$  sont donc convergentes vers des limites finies  $U$  et  $V$  et  $U \leq V$

Soit  $c$ , un réel de l'intervalle  $[U ; V]$ .  $\forall n > 0, 0 \leq f(c) \leq \frac{1}{n} \Rightarrow f(c) = 0$

Conclusion  $D$  est dense dans  $[a ; b]$

**Exercice 700 :**

On se place dans un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  ( $n > 1$ ) sur  $K$ . Soit  $f$  un endomorphisme non nul de  $E$  ayant la propriété suivante : pour tout endomorphisme  $g$  de  $E$ ,  $g \circ f = f \circ g$  ( $f$  commute avec tout endomorphisme)

1 – Soit  $h$  un endomorphisme de  $E$  pour lequel toutes les familles  $\{x, f(x)\}$  sont liées pour tout vecteur  $x$  de  $E$  (condition C1). Montrer que  $h$  est une homothétie

2 – Montrer que  $\text{Ker } f = \{0\}$

3 – Montrer que  $f$  vérifie C1. Conclure

SOLUTION :

1 – Soit  $x$  et  $y$  deux vecteurs distincts et non nuls. On écrit :  $f(x) = a x$  ;  $f(y) = b y$  ;  $f(x + y) = c (x + y)$

On obtient :  $f(x + y) = f(x) + f(y) = c (x + y) = ax + by$

Cas 1 : Si  $x$  et  $y$  sont liés, on écrit  $y = k x$ , puis  $f(y) = b y = b k x = f(k x) = k f(x) = k a x$

$x$  n'est pas nul,  $k$  est différent de 0, on en déduit  $a = b$

Cas 2 : Si  $x$  et  $y$  sont indépendants, on obtient  $c = a$  et  $c = b$ , d'où  $a = b = c$

Ainsi :  $\exists \lambda, \forall x \in E, f(x) = \lambda x$

Conclusion :  $f$  est une homothétie

2 – Raisonnement par l'absurde : soit  $x$  un vecteur non nul de  $E$  tel que  $f(x) = 0$

Pour tout endomorphisme  $g$ , on obtient  $f(g(x)) = g(f(x)) = 0$

On applique le théorème de la base incomplète, à la famille libre  $\{x\}$ , ce qui assure l'existence d'une base  $B$  de  $E$  de la forme  $(u_1 = x, u_2, \dots, u_n)$

On définit sur  $B$ , l'endomorphisme  $g$  tel que :

$$g(x) = u_2$$

$$g(u_k) = u_{k+1}, k \text{ compris entre } 2 \text{ et } n - 1$$

$$g(u_n) = x$$

Ainsi définie,  $g$  est une permutation circulaire et  $u_k = g(u_{k-1}) = g^{k-1}(x)$  ( $g$  appliqué  $k - 1$  fois) pour tout  $k$  compris entre 2 et  $n$ . Recherchons les images par  $f$  des éléments de la base  $B$

$$f(x) = 0 ; f(u_2) = f(g(x)) = 0, \text{ et plus généralement } f(u_k) = f(g^{k-1}(x)) = g^{k-1}(f(x)) = 0, k \text{ compris entre } 2 \text{ et } n$$

$f$  est donc nulle sur  $E$  : IMPOSSIBLE

Conclusion :  $\text{Ker } f = \{0\}$

3 – Raisonnement par l'absurde : soit  $x$  un vecteur non nul de  $E$  tel que la famille  $\{x, f(x)\}$  est libre

On applique le théorème de la base incomplète, à la famille  $\{x, f(x)\}$ , ce qui assure l'existence d'une base  $B'$  de  $E$  de la forme  $(x, f(x), u_3, \dots, u_n)$

On définit sur  $B'$ , l'endomorphisme  $g$  tel que :

$$g(x) = x + f(x)$$

$$g(f(x)) = f(x)$$

$$g(u_k) = u_k, k \text{ compris entre } 3 \text{ et } n$$

$$\text{On a : } f(g(x)) = f(x) + f(f(x)) = g(f(x)) = f(x)$$

Il en résulte  $f(f(x)) = 0$  puis (voir question 2)  $f(x) = 0$  : IMPOSSIBLE

$f$  vérifie donc la condition C1

Conclusion :  $f$  est une homothétie

**Exercice 800 :**

On se place dans un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  ( $n > 1$ ) sur  $K$ . Soit  $f$  un endomorphisme non nul de  $E$ , on note  $p$  le nombre de valeurs propres de  $f$

1 – Peut-on avoir  $p > n$  ? peut-on avoir  $p = 0$  ? Si oui, donner des exemples

2 – On suppose  $p = n$ .  $f$  est-elle diagonalisable ?

3 – On suppose que  $p = 1$ . Que dire de  $f$  si  $f$  est diagonalisable ?

SOLUTION :

On note  $I$  la matrice de l'identité.

1 – \*\* On ne peut pas avoir  $p > n$ . Effet, chaque espace propre est de dimension supérieure ou égal à 1, et la somme de ces espaces est directe. Cette somme directe serait ainsi de dimension supérieure ou égale à  $n + 1$ , ce qui est impossible

\*\* On peut avoir  $p = 0$ .

Exemple :  $K = \mathbb{R}$ ,  $n = 2$ , dans la base canonique,  $f$  a pour matrice  $M$ .  $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ( $f$  est une rotation

d'angle  $\frac{\pi}{2}$ ). On remarque que  $M^2 = -I$  et toute valeur propre  $\lambda$  vérifierait  $\lambda^2 = -1$  : impossible à résoudre

2 –  $f$  est diagonalisable dans ce cas. En effet, une famille de  $n$  vecteurs non nuls, constituée de vecteurs propres associés à chaque valeur propres est nécessairement libre, elle forme donc une base de  $E$ .  $f$  est alors par définition diagonalisable

3 –  $p = 1$ . Soit  $M$  la matrice de  $f$  dans une base quelconque. Si  $f$  est diagonalisable, alors dans une base adaptée de vecteurs propres, la matrice de  $f$  serait de la forme  $\lambda I$  ( $\lambda \in K$ ).  $f$  serait alors une homothétie (

$$M_f = P D P^{-1} = P \lambda I P^{-1} = \lambda I$$

