

Document avec corrigé : non

Exercice 100 :

On considère une fonction f , continue sur l'intervalle $[0 ; 1]$. On définit la suite u de la façon suivante.

n est un entier strictement positif : $u_n = (n+1) \int_0^1 x^n f(x) dx$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = f(1)$

Exercice 200 : (HEC 2008)

On définit la suite u :

$$u_0 \in [0 ; 1] \text{ et } u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$$

1 – Soit la propriété $P(n) : 1 \leq u_n \leq 2$

Montrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour $n \geq 1$

2 – En déduire la limite de u en $+\infty$

3 – Déterminer un développement limité en $+\infty$ de la forme $u_n = 1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{1}{n^2} \epsilon\left(\frac{1}{n}\right)$ où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

Exercice 300 : (Concours général)

Soit f une fonction de \mathbf{N} dans \mathbf{N} telle que pour tout entier naturel $n : f(n+1) > f(n)$

1 – Montrer par récurrence que pour tout entier naturel k , la propriété $P(k)$ suivante est vraie :

$$\forall n > k, f(n) > k$$

2 – En déduire que f est une fonction croissante

3 – En déduire que $f(n) = n$ pour tout entier naturel n

Exercice 350 :

1 – Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit f une fonction continue et définie sur I . On suppose que (C1) :

$$\forall x \in I, \forall y \in I, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y)) \text{ . Montrer que } f \text{ est convexe sur } I$$

2 – Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} de classe C^2 , vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x+y)f(x-y) \leq (f(x))^2$

Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, f''(t)f(t) \leq (f'(t))^2$

Exercice 400 : (HEC 2007)

Soit p une probabilité définie sur un univers E . Soit A, B et C trois événements de E vérifiant les propriétés suivantes :

$$P(A) = p(B) = p(C) = q$$

$$p(A \cap B \cap C) = 0$$

1 – Montrer que $q \leq \frac{2}{3}$

2 – On suppose dans cette question que A, B et C sont indépendants deux à deux. Montrer que $q \leq \frac{1}{2}$

Exercice 500 : (HEC 2007)

Pour tout entier naturel n , on définit la fonction réelle : $f_n(x) = x^5 + nx - 1$

1 – Montrer que pour tout n , il existe un unique réel u_n vérifiant $f_n(u_n) = 0$
On définit ainsi une suite u que l'on se propose d'étudier

2 – Déterminer la limite éventuelle de u , ainsi qu'un équivalent de u_n

3 – Pour $n > 0$, on définit la suite a : $u_n = \frac{1}{n} - a_n$. Déterminer un équivalent de a_n

Exercice 600 :

Soit f une fonction réelle positive, définie et intégrable sur un intervalle fermé et borné $[a ; b]$ ($a < b$) telle que :

$$\int_a^b f(x) dx = 0$$

1 – Dans cette question uniquement, on suppose que f est continue. Montrer que f est nulle sur $[a ; b]$

2 – On note $D = \{x \text{ de } [a ; b], \text{ tels que } f(x) = 0\}$. Montrer que D est dense dans $[a ; b]$

Exercice 700 :

On se place dans un espace vectoriel E de dimension n ($n > 1$) sur K . Soit f un endomorphisme non nul de E ayant la propriété suivante : pour tout endomorphisme g de E , $g \circ f = f \circ g$ (f commute avec tout endomorphisme)

1 – Soit h un endomorphisme de E pour lequel toutes les familles $\{x, f(x)\}$ sont liées pour tout vecteur x de E (condition C1). Montrer que h est une homothétie

2 – Montrer que $\text{Ker } f = \{0\}$

3 – Montrer que f vérifie C1. Conclure

Exercice 800 :

On se place dans un espace vectoriel E de dimension n ($n > 1$) sur K . Soit f un endomorphisme non nul de E , on note p le nombre de valeurs propres de f

1 – Peut-on avoir $p > n$? peut-on avoir $p = 0$? Si oui, donner des exemples

2 – On suppose $p = n$. f est-elle diagonalisable ?

3 – On suppose que $p = 1$. Que dire de f si f est diagonalisable ?