**NOMBRES COMPLEXES**

# Table des matières

# I – Généralités

## 1 – Historique

On a cherché à résoudre des équations de plus en plus difficiles. Voici quelques exemples.

| Equation | Une solution possible | Localisation |
|---|---|---|
| $2x + 3 = 5$ | 1 | Ensemble des entiers naturels : **N** |
| $2x + 5 = 3$ | – 1 | Ensemble des entiers relatifs : **Z** |
| $2x = 3$ | $\frac{3}{2}$ | Ensemble des rationnels : **Q** |
| $x^2 = 2$ | $\sqrt{2}$ | Ensemble des réels : **R** |
| $x^2 = -1$ | imaginaire pur i | Ensemble des complexes : **C** |

## 2 – Définitions

Un nombre complexe z , s'écrit sous la forme : $z = x + i y$
x et y appartiennent à **R**, i est appelé nombre imaginaire pur vérifiant $i^2 = -1$

Exemples : i, – i, 1 + i, 2 – 3i

L'ensemble des nombres complexes est noté **C** . On admet que dans cet ensemble les formules connues restent valables ($z + z' = z' + z$ ; $z z' = z' z$ ; $z (z' + z'') = z z' + z z''$ ; $1 z = z$ ; $0 z = 0$ ; ...)

REMARQUE 1 : On admet que cette représentation est unique
C'est-à-dire qu'un nombre complexe est représenté de manière unique par x et y
Autrement dit : si $x + i y = x' + i y'$ (x, x', y et y' appartenant à **R**) $\Leftrightarrow$ $x = x'$ ET $y = y'$

Exemple : $x + i y = 3i$ impose $x = 0$ et $y = 3$

REMARQUE 2 : **R** appartient à **C**
En effet, pour $z = x + i y$ , en imposant $y = 0$, on obtient $z = x$

REMARQUE 3 : Correspondance entre **C** et le plan
Dans un plan muni d'un repère orthonormé direct, à tout point M correspond un couple de réels (x, y) représentant de manière unique un nombre complexe $z = x + i y$

Exemples de correspondance :

| complexe | point |
|---|---|
| 0 | M(0, 0) |
| i | M(0,1) |
| 1 | M(1, 0) |
| -i | M(0, -1) |
| 3i | M(0, 3) |
| 1 + i | M(1,1) |
| 1 – 6i | M(1, – 6) |

| | |
|---|---|
| $x = Re(z)$ | partie réelle de z |
| $y = Im(z)$ | partie imaginaire de z |

z est dit réel , si et seulement si $y = 0$

Exemples : 1 ; 3 ; 67

z est dit imaginaire pur, si et seulement si $x = 0$

Exemples : i ; 3i ; -4i

On pose $z = x + i y$
Le conjugué de z est le complexe $x - i y$ , noté $\overline{z}$

Exemples :

| $z$ | $\overline{z}$ |
|---|---|
| $1 + i$ | $1 - i$ |
| 11 | 11 |
| $-3i$ | $3i$ |
| 0 | 0 |

## 3 – Représentation géométrique

Quelques notations :
On pose $z = x + i y$ et $M(x ; y)$
Le complexe z est l'affixe du point M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$
Le point $M(x ; y)$ est l'image de z
Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de z

L'axe Ox est l'axe réel (contient les points d'affixe $z = x + 0 i$) et l'axe Oy est l'axe imaginaire (contient les points d'affixe $z = 0 + i y$)

## 4 – Règles de calcul des complexes

k est un réel, z et z' sont des complexes
$z = x + i y$ ; $z' = x' + i y'$

$kz = kx + i ky$
$z + z' = (x + x') + i (y + y')$
$z z' = (xx' - yy') + i (xy' + x'y)$

Exemples :
$2 + i (3 + i) = 1 + 3 i$ ; $(1 + 4i)(2 - i) = 6 + 7 i$

Propriétés :

$z \overline{z} = x^2 + y^2$
Lorsque z n'est pas nul, alors il possède un inverse $z^{-1}$ égal à $\overline{z} / (x^2 + y^2)$

On utilise cette expression lors d'un calcul du type $z' / z$. Ce rapport est identique à $z' z^{-1}$

Exemples :
L'inverse de i est – i
L'inverse de 1 + 2 i est $\frac{1-2i}{5}$
$\frac{1+i}{i}$ = 1 – i

Propriétés :

Conjugué de z + z' : $\bar{z} + \bar{z'}$
Conjugué de z z' : $\bar{z}\ \bar{z'}$
Conjugué de z / z' : $\bar{z} / \bar{z'}$ on se place dans le cas où z' ≠ 0
Conjugué de $\bar{z}$ : z

z + $\bar{z}$ = 2 Re(z)
z – $\bar{z}$ = 2 i Im(z)
z est réel ⇔ $\bar{z}$ = z
z est imaginaire pur ⇔ $\bar{z}$ = – z

Interprétation géométrique importante :
Soit M et M' deux points du plan. On considère le vecteur $\overrightarrow{MM'}$
$z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{M'} - z_M$

## II – Equations du second degré à coefficients réels

Contexte : On cherche à résoudre l'équation (E) az² + bz + c = 0
a, b et c sont des réels, a n'est pas nul. On pose Δ = b² – 4 ac
z est maintenant un nombre complexe

Propriété :
L' équation (E) admet toujours deux solutions (confondues lorsque Δ = 0)
Si Δ > 0 les solutions sont réelles distinctes
Si Δ = 0 les solutions sont confondues (solution double)
Si Δ < 0 les solutions sont complexes conjuguées

On pose Δ = b² – 4ac = δ² (δ est un nombre complexe lorsque Δ est strictement négatif)
Les solutions sont $\frac{-b-\delta}{2a}$ *et* $\frac{-b+\delta}{2a}$

REMARQUE : L'expression az² + bz + c peut toujours se factoriser dans **C**

Exemples :
(E) : z² – 2z + 2 = 0
Δ = (-2)² - 8 = - 4 < 0 Δ = (2i)²
On a deux solutions complexes conjuguées : 1 – i et 1 + i

(E) : z² + 1 = 0
On a deux solutions complexes conjuguées : i et – i

(E) : $z^3 = 1$
Rappel : $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$
Ainsi $z^3 = 1$ si et seulement si $z = 1$ OU $z^2 + z + 1 = 0$. On résout la deuxième équation
$\Delta = (1)^2 - 4 = -3 < 0$ $\Delta = (\sqrt{3}i)^2$

Les solutions de la deuxième équation sont $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

Les solutions de E sont : $S=\{1;\frac{-1-\sqrt{3}i}{2};\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\}$

# III – Module et argument

Idée directrice : On cherche à repérer un point M d'une autre façon

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Une façon usuelle de repérer M est de prendre en compte ses coordonnées dans ce repère, M(x, y)

Une autre façon est de prendre en compte :
- Sa distance r au point O
- L'angle orienté de vecteurs $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$ repéré par sa mesure θ (2π)

## 1 – Définitions

Soit M(x, y) d'affixe z = x + i y
Le module de z est le réel $\sqrt{x^2+y^2}$ , c'est r. Il est noté aussi |z|
Un argument (arg) de z est θ
Le couple (r, θ) forme les coordonnées polaires

Remarque : On se place dans le cas où z n'est pas nul (0 n'a pas d'argument)

PROPRIETE : Avec les définitions précédentes
$x = r \cos \theta$
$y = r \sin \theta$

## 2 – Forme algébrique et forme trigonométrique

Si on connaît M par ses cordonnées cartésiennes, son affixe à une forme dite algébrique
z = x + i y
Si on connaît M par ses coordonnées polaires, son affixe à une forme dite trigonométrique
$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

Problème classique : passer d'une forme à l'autre
Si on connaît (r, θ) on en déduit simplement (x, y)
$x = r \cos \theta$ ; $y = r \sin \theta$

Si on connaît (x, y) on en déduit (r, θ) par les relations

$$r=\sqrt{x^2+y^2};\cos\theta=\frac{x}{r};\sin\theta=\frac{y}{r}$$

## *3 – Propriétés*

Dans toute cette partie z et z' sont deux complexes d'image M et M'
On pose :
$z = x + i y$ ; $z' = x' + i y'$
$z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$ ; $z' = r' (\cos \theta' + i \sin \theta')$

Propriété : $z = z'$ si et seulement si
$x = x'$ ET $y = y'$
OU
$r = r'$ ET $\theta = \theta'$ $(2\pi)$

Les propriétés qui suivent ont pour objectif de retrouver le module et un argument d'expressions courantes

<u>CAS 1 : z z'</u>
On a
$z z' = r(\cos \theta + i \sin \theta)\, r'(\cos \theta' + i \sin \theta') = r r' [(\cos \theta \cos \theta' – \sin \theta \sin \theta') + i (\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta')]$
$= r r'[\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')]$
Conclusion : $|z z'| = |z| |z'|$ et $\arg(z z') = \arg(z) + \arg(z')$ $(2\pi)$

Cette formule est importante car elle permet de donner une interprétation géométrique au produit de deux complexes. Voici des exemples simples.
INTERPRETATION GEOMETRIQUE :
On pose $z' = i z$
On sait que $|i| = 1$ et $\arg(i) = \pi/2$ $(2\pi)$. On en déduit que $|z'| = |z|$ et $\arg(z') = \arg(z) + \pi/2$ $(2\pi)$
M' est donc l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$

INTERPRETATION GEOMETRIQUE :
On pose $z' = 2 z$
$|z'| = 2 |z|$ et $\arg(z') = \arg(z)$ $(2\pi)$
M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 2

<u>CAS 2 : - z</u>
On trouve aisément : $|-z| = |z|$ et $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$ $(2\pi)$

INTERPRETATION GEOMETRIQUE :
M'(-z) est l'image de M(z) par la symétrie centrale de centre O ou la rotation de centre O et d'angle $\pi$

<u>CAS 3 : $\bar{z}$</u>
On trouve aisément : $|\bar{z}| = |z|$ et $\arg(\bar{z}) = – \arg(z)$ $(2\pi)$

INTERPRETATION GEOMETRIQUE :
M'($\bar{z}$) est l'image de M(z) par la symétrie axiale d'axe Ox

<u>CAS 4</u> : $\frac{1}{z}$
On suppose que $z \neq 0$

A partir de la remarque : $z\times\frac{1}{z}=1$ , on déduit : $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$ $et\ arg(\frac{1}{z})=-arg(z)(2\pi)$

<u>CAS 5</u> : $\frac{z}{z'}$

On suppose que z' ≠ 0

A partir de la remarque : $\frac{z}{z'}=z\times\frac{1}{z}$ , on déduit : $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ $et\ arg(\frac{z}{z'})=arg(z)-arg(z')(2\pi)$

$Application : calcul\ de\ \cos(\frac{\pi}{12})\ et\ de\ \sin(\frac{\pi}{12})$

On remarque que $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$

Soit M de coordonnées polaires (1, $\frac{\pi}{3}$ ). Son affixe z est par définition $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

Soit M' de coordonnées polaires (1, $\frac{\pi}{4}$ ). Son affixe z' est par définition $z=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$

On s'intéresse au complexe $\frac{z}{z'}$ . Il est de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{12}$ . On en déduit les expressions recherchées

$\frac{z}{z'}=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=\frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ D'où :

$\cos(\frac{\pi}{12})=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\sin(\frac{\pi}{12})=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

## *4 – Forme exponentielle*

a – Approche

On considère la fonction f définie sur **R** à valeurs dans **C** par la relation : f(θ) = cos(θ) + i sin(θ)
f(θ) est un nombre complexe de module 1 et d'argument θ
En utilisant CAS 1 du sous-chapitre précédent : f(θ + θ') = f(θ) f(θ')
f vérifie l'équation fonctionnelle caractéristique des fonctions exponentielles. Il semble naturel de chercher à représenter f(θ) sous la forme $e^{k\theta}$
Afin de trouver k, dérivons f (par rapport à θ). On a : f ' (θ) = – sin(θ) + i cos(θ) = i f(θ)
Conclusion : le k recherché est égal à i

b – Définition

Soit z un nombre complexe non nul, de module r et d'argument θ. On admet une nouvelle écriture de ce complexe :
z = r(cos θ + i sin θ) = r $e^{i\theta}$
C'est la forme exponentielle de z

Propriétés

Soit z = $e^{i\theta}$ Soit z' = $e^{i\theta'}$
$e^{i\theta}\,e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$
$\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$

Exemples :

$i=e^{i\frac{\pi}{2}}$

$1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{\pi}{6}}$

Application : On pose z = 1 +i ; calculer $z^{10}$
La forme algébrique n'est pas adaptée pour faire ce calcul. Utilisons plutôt la forme exponentielle de z, calculée précédemment

$$z=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\Rightarrow z^{10}=\sqrt{2^{10}}e^{10i\frac{\pi}{4}}=2^5e^{2i\pi+i\frac{\pi}{2}}=32e^{i\frac{\pi}{2}}=32i$$

# IV – Nombres complexes et géométrie

## *1 – Généralités*

RAPPEL : Soit $\vec{s}$ un vecteur d'affixe z
arg(z) = $(\vec{u},\vec{s})$
RAPPEL : Soit M et M' deux points du plan

$z_{\overrightarrow{MM'}}=z_{M'}-z_M$

$arg(z_{M'}-z_M)=(\vec{u},\overrightarrow{MM'})(2\pi)$

Soit A, B et C trois points du plan deux à deux distincts d'affixes respectifs $z_A$, $z_B$, $z_c$

<u>Remarque 1</u> :
$|z_B - z_A| = AB$
Si ceci n'est pas évident, passer par le point M tel que $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$

Application :
On cherche tous les z vérifiant |z – i| = 3
z est sur le cercle de centre A(i) et de rayon 3

Application :
On cherche tous les z vérifiant |z – i| = |z – 1|
z est sur la médiatrice de la droite BC où B(i) et C(1)

<u>Remarque 2</u> :

Etudions le complexe $Z=\frac{z_B-z_c}{z_A-z_C}$

$|Z|=\frac{CB}{CA}$

$arg(Z)=(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})(2\pi)$

En effet :

$$arg(Z)=arg(z_B-z_C)-arg(z_A-z_C)=(\vec{u},\overrightarrow{CB})-(\vec{u},\overrightarrow{CA})=(\vec{u},\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{CA},\vec{u})=(\overrightarrow{CA},\vec{u})+(\vec{u},\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$$

Application :

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si : $arg(\frac{z_B-z_c}{z_A-z_C})=0(\pi)$

(Remarquer que C peut être intérieur ou extérieur à [A ; B])

Application :

les droites (CA) et (CB) sont perpendiculaires si et seulement si : $arg(\frac{z_B - z_c}{z_A - z_C}) = \frac{\pi}{2} (\pi)$

## 2 – Transformations du plan

a – Translation

Soit M(z) et $\vec{T}$ le vecteur d'affixe t. Soit M'(z') l'image de M par la translation de vecteur $\vec{T}$ .
On sait que $\vec{T} = \overrightarrow{MM'}$ , on en déduit t = z' – z , d'où :
z' = z + t

Exemple : z' = z + 1 + 2i
Il s'agit d'une translation de vecteur d'affixe 1 + 2i

b – Homothétie

Soit M(z) et Ω(ω) deux points du plan . Soit k un réel. Soit M'(z') l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k
Par définition, on a la relation : $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$ d'où :
z' – ω = k (z – ω)

Remarque : z' = k z + ω (1 – k)

Exemple : z' = 2 z + i
Le rapport k est le coefficient réel de z, c'est-à-dire 2
Le centre Ω est l'unique point invariant par cette transformation. Il vérifie : z' = ω
Ce qui donne : ω = 2 ω + i
Il s'agit d'une homothétie de centre Ω(– i) et de rapport 2

c – Rotation

Soit M(z) et Ω(ω) deux points du plan . Soit θ un réel. Soit M'(z') l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle θ
Soit z différent de ω. On s'intéresse au complexe $Z = \frac{z' - \omega}{z - \omega}$
Par application de la remarque 2
|Z| = 1 et arg(Z) = θ (2π)
Ainsi Z = $e^{i\theta}$
Ce qui donne la relation :
z' – ω = $e^{i\theta}$ (z – ω)

Remarque : z' = $e^{i\theta}$ z + ω (1 – $e^{i\theta}$)

Exemple : z' = i z + 1
Le coefficient de z est différent de 1 et de module 1, il s'agit d'une rotation dont un argument est l'angle de la rotation
Le centre Ω est l'unique point invariant par cette transformation. Il vérifie : z' = ω

Ce qui donne : ω = i ω + 1 d'où $\omega=\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{2}$

Il s'agit d'une rotation de centre $\Omega(\frac{1+i}{2})$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Synthèse dans le cas général de la transformation : **z' = a z + b**
a et b étant deux complexes, a non nul

| Condition | Nature | Exemples |
|---|---|---|
| Si a = 1 | Translation de vecteur d'affixe b | z' = z + 1 – 5i<br>z' = z – 52 |
| SINON si $a \in \mathbb{R}$ | Homothétie de rapport a et dont l'affixe du centre vérifie $\omega=a\omega+b$ | z' = – 8 z + 1 – 5i<br>z' = 0,6 z – 52 |
| SINON si \|a\| = 1 | Rotation d'angle arg(a) et dont l'affixe du centre vérifie $\omega=a\omega+b$ | z' = – i z + 5 + 6i<br>$z'=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}z-2i$ |
| SINON | Cas général des similitudes directes (non traité) | z' = 4i z – 9 |